This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

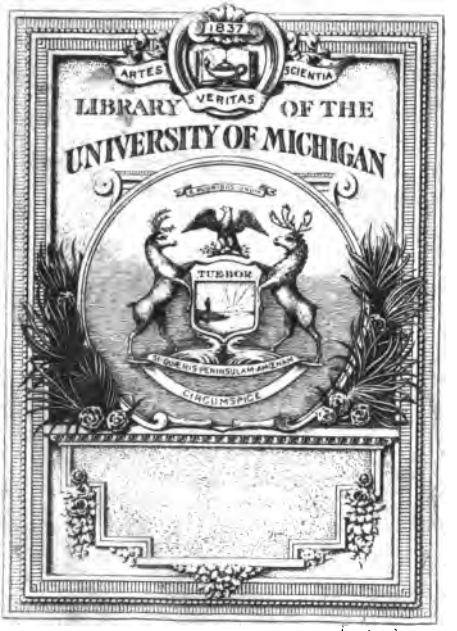
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Canc. Gianfranco Cremona

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. VI F. 3 N. 34



QA
35
.F82

TEORIA
DELL' ANALISI
DA SERVIRE
D'INTRODUZIONE AL METODO DIRETTO,
ED INVERSO DE' LIMITI
OPERA
DELL' AB. PIETRO FRANCHINI
PROFESSORE DI FILOSOFIA NEL VESCOVIL
SEMINARIO DI VEROLI.
TOMO TERZO

IN ROMA MDCCXCIII.
Per il Cannetti vicino alla Rotonda.

Con Licenza de' Superiori.

Lit. Com.
Maglione
2-F-28
16615

INDICE

DELLE COSE PRINCIPALI CONTENUTE NEL TERZO TOMO

PARTE III.

	Pag.	num.
Della formazione, e generali proprietà dell' equazione	599.	1003
Del numero delle radici	ivi.	1005
Della natura de coefficienti	604.	1013
Delle variazioni di segno nella somma di un termine di equazioni prodotte dalla sostituzione di quantità diverse in luogo dell' incognita	613.	1019, e seg.
De' segni delle radici	616.	1026
De' risultati che presentano l'equazioni	617.	1028 e seg.
Dell' equazioni mancanti di qualche termine	620.	1035
Metodo di determinare se un'equazione contenga delle radici immaginarie	622.	1036
Dell' Eliminazione	629.	1041
Del grado dell' equazione finale risultante dall' Eliminazione	641.	1049
Della Trasformazione dell' equazioni	643.	1050
Accrescere, e diminuir le radici	ivi.	1052
Mutarle nelle loro differenze	146.	1057
Moltiplicarle, e dividerle	651.	1059
Liberare un'equazione dalla irrazionalità	654.	1063
Trasformar le radici nelle reciproche	655.	1065

Tra-

Trasformare un' equazione in maniera che un determinato coefficiente divenga eguale ad una quantità data 657. 1067
Rendere i segni delle radici tutti positivi, o tutti negativi 658. 1068
Trasformare un' equazione in guisa che ciascuna radice della trasformata sia una medesima potenza qualunque delle radici della proposta 661. 1076
Togliere un termine qualunque 662. 1077
Toglierli tutti meno due 665 1081
Render completa un' equazione mancante di qualche termine 665. 1083
De' limiti delle radici 668. 1086
Della caratteristica che distingue i Limiti 669. 1088
Dell' equazione de' Limiti, e sue proprietà 670. 1089 *e seg.*
Teorema fondamentale per il ritrovamento de Limiti 673. 1093
Dell'equazioni che hanno delle radici eguali 676. 1097
Determinare se un'equazione contenga radici eguali, e quante ne contenga 676. 1098
Dell'equazioni Derivative 677. 1109
Dell' equazioni Pure 680. 1118
Dell' equaziuni Convertibili, Omogenee, e Lineari 684 1121
Dell' equazioni Finali, *e della loro* Sede 685. 1125

PARTE IV.

Dell' Analisi in generale 687. 1130
Dell'Analisi Algebrica Determinata 689. 1133
Soluzione dell'equazioni di primo grado 692 1138
Alligazione 697. 1134 *e seg.*

Fal-

Falsa Posizione 699. 1136
Dell' equazioni di secondo grado 704. 1143
Dimostrazione diretta del Teor. esposto al n. 1026 intorno ai segni delle radici, in conseguenza de' segni dei termini 716. 1156
Dell' equazioni di terzo grado 720. 1157
Se un'equazione cubica ha tutte le radici reali, la formola Cardanica risulta immaginaria; e viceversa, se abbia due radici immaginarie 726. 1163
Che la formola Cardanica nel Caso irriducibile *non ammette una forma reale* 730. 1166
Qual sia il principio da cui questo ne deriva 733. 1168
Soluzione approssimata dell'equazioni cubiche 1171
(Veda pag. 839. sul fine dov' è stata trasposta contro la disposizione dell' Autore)
Dell' equazioni di quarto grado 742. 1176
Dell' ebuazioni de' gradi Superiori 754. 1183
Metodo di VVanringh per l' equazioni di quinto grado *ivi.* 1184
Per l'equazioni di sesto grado 758. 1185
Metodo di Varignon 760. 1186
Metodo de' Fattori indetermiaati *Met.* II.
Soluzione dell' equazioni Reciproche 765. 1188
Ritrovamento de' fattori quadratici dell' equazioni Pure 768. 1191
Metodo dei divisori *Met.* III
Metodo delle radici indeterminate *Met.* IV
Metodo per l' equazioni di cui le radici ammettono una forma Cardanica *Met.* V

Me-

Metodo per l'equazioni che hanno delle radici eguali *Met.* *VI*
Determinazione de' limiti delle radici reali diseguali di un'equazione 788. 1195
Metodo de' limiti 789. 1197
Correzione del Metodo 793. 1199
Metodi del P. Rayneand, e di M. Rolle 797. 1202
Soluzione dell'equazioni superiori, affette da coefficienti letterali 798. 1303
Determinazione delle radici immaginarie 800. 1204
Applicazione dell'Analisi alla dimostrazione de' Teoremi 804. 1206
Alla soluzione de' Problemi di Massimo *e di* Minimo 808. 1211
Alla soluzione de' problemi Fisico-Matematici 811. 1215
Dell' Analisi Geometrica Determinata 816. 1219
Costruzione dell'equazioni di primo grado 817. 1222
Costruzione dell'equazioni di secondo grado 625. 1229
Costruzione dell'eqnazioni de' gradi superiori 830. 1236
Dell'Analisi Algebrica Indeterminata 836. 1242
Soluzione dell'equazioni di primo grado 837. 1244
Soluzione dell'equazioni di secondo grado 842. 1251
Soluzione in numeri razionali fratti 849. 1267
Soluzione in numeri interi 861. 1282
Soluzione dell' equazioni indeterminate superiori al secondo grado 897. 1341
Dell' Analisi Geometria Indeterminata 999. 1352
Soluzione de' probl. geometrici indeterminati di primo grado 910. 1354
Soluzione de' probl. geometrici indeterminati di secondo grado 913. 1355
De' Problemi geometrici indeterminati degli ordini 928. 1380

Pag. lin.	ERRORI	CORREZIONI.
640. *ult.*	$c^{I}=q^{2}$	$C^{I}=q^{2}$
659. 14	se ode	se a
660. *pen.*	bx^{n-3} &c. $\frac{n(n-1)}{2}$	x^{n-3} &c. $\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+$
	$x^{n-2}+\frac{(n-1)\ (n-2)}{2.\ 3}ax^{3-}$	$\frac{(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}ax^{n-3}$
695. 15	quella da prendersi dal terzo	quella da prendersi dal secondo sia y, e quella da prendersi dal terzo
696. 7	&c. $+ac^{II}z=$	&c. $+ac^{II}z-aa^{I}b^{I}cz$ $+a^{I}a^{II}bcz+a^{II}b^{I}c^{II}z$
707. 10	si trova $+b^{2}=\frac{B^{2}}{4}\mp C$, e mutando i segni	si trova, mutando i segni, $+b^{2}=\frac{B^{2}}{4}\mp C$
714. 6	$(\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-1b})$	$(\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{-a-2b})$
737. *num.*	1172. A questo paragrafo dee riferirsi la soluzione approssimata, che incomincia sul fine della pag. 739. ivi trasportata contro la disposizione dell'Autore	
744. 22	di f, $gpdh$	di f, g, h
747. 20	i tre ultimi	i tre ultimi termini
750. 19	compariscono	compariscano
755. 9	$2a$	2^{a}
756. 16	$M\frac{P}{b}$	$M=\frac{P}{b}$
757. *pen.*	e si avrà	e perchè questa funzione è (*nV.*) eguale a zero da se stessa, si avrà...
786. 9	si formi un'equazione ge-	si formi un' equazione ge-

		nerale di un grado $n-2$	nerale di un grado $n-2$, e \si moltiplichi per un'equazione a radici eguali indeterminate di 2.° grado.
792.	20	derivano	derivino
809.	13	$+\frac{4\,b.}{3\,a}x=0$;	$+\frac{4\,.\,b}{3}x\frac{\frac{a}{2}-x)}{4\sqrt{)ax-x^2)}}=0$;
	16	per mezzo dei coefficienti di ciascun	per mezzo dei coefficienti di ciascun differenziale, e si avrà
819.	13	costruscano	costruiscono
824.	5	$=2bm^2$	$=\frac{2bm^2}{a}$.
834.	16	$x^2+y^2=\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}n^2$	$x^2+y^2=nx+my$,
862.	24	$\mathcal{A}^{\prime}$ è $=u^{\prime 2}Bc^{\prime 2}$	$\mathcal{A}^{\prime}$ è $=u^{\prime 2}\pm Bt^{\prime 2}$
877.	24	Lo stesso replicarsi	Lo stesso dee replicarsi
880.	24	$(\sigma^{\prime\prime\prime}+\tau^{\prime\prime\prime}\sqrt{B}$,	$(\sigma^{\prime\prime\prime}+\tau^{\prime\prime\prime}\sqrt{B})(\sigma^{\prime\prime\prime}-\tau^{\prime\prime\prime}\sqrt{B})$
884.	18	$\mp E^{\prime}=\tau^{\prime 2}-B\tau^{\prime 2}$	$\mp E^{\prime}=\sigma^{\prime 2}-B\sigma^{\prime 2}$
891.	7	Cr, $\rho^{\prime}$	Cr, $r^{\prime}$
	22	x^2+gx+	$f+gx+$
898.	5	Da questo	Da questa
899.	20	$=E$	$=D$
903.	15	delle quali	dalle quali
904.	5	ha $z=V$	si ha $z=V$
	18	sieno $\frac{l}{M}$	sieno $\frac{l}{L}$
914.	16	$-\frac{q^2}{4m}$	$-\frac{q^2}{4m^2}$ t.

TEORIA DELL' ANALISI

PARTE IV.

TEORIA DELL' EQUAZIONE,

1002. CIO' che si è trattato nella Parte antecedente, può bastar certamente per entrar con successo nell'Analisi. Ad oggetto però di poter maneggiare con più ragionata padronanza l'equazione, che esser poi dee l' istrumento di tutte le ricerche Analitiche, gioverá moltissimo trattenersi ad esaminare in tutta l'estensione possibile quanto appartiene ad una profonda cognizion Teorica dell'equazione.

CAPITOLO I.

Della formazione, e delle generali proprietà dell'equazione.

1003. Un' equazione affetta dicesi completa, quando comprende tutte le potenze dell'incognita, dalla massima, che ne costituisce l'ordine, fino alla potenza zero inclusivamente. Se questo seguito di potenze sia interrotto, l'equazione è incompleta.

1004. Un'equazione affetta, dicesi ancora ordinata, quando tutti i termini essendo trasposti in un membro, le potenze dell'incognita sono disposte per ordine in modo, che vadano successivamente diminuendo; tal è l'equazione $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} .. + Kx^{m-m} = 0$.

1005. *Teor.* Un' equazione qualunque ha tante radici, quante unità contiene il massimo esponente dell'incognita, che ne costituisce l' ordine.

Dimostrazione. Un'equazione può sempre ridursi ad un rapporto di eguaglianza fra zero, e la somma di tutti i termini componenti l'equazione stessa; altro non richiedendosi, che trasporre per mezzo dell'Antitesi tutti i termini in un sol membro.

Ora tal'è la natura di un'equazione a zero, che sostituita un' opportuna quantità in luogo dell' incognita, si dee verificare con la distruzione de'suoi termini. Esiste dunque generalmente almeno un valore dell'incognita, che a ciò sodisfa. Sia questo $=a$. E'chiaro, che a dee essere una radice dell'equazione, e che $x-a$ dev'essere una parte comune a tutti i termini, altrimenti la supposizione di $x=a$ non ridurrebbe a zero tutti i termini.

Essendo pertanto l'equazione proposta della forma generale $x^m+a'x^{m-1}+b'x^{m-2}$ &c. $+k'=0$, dove a', b', c' &c. sono coefficienti cogniti, affinchè $x=a$ la verifichi, bisogna che possa ridursi alla forma $(x-a)(x^{m-1}+a''x^{m-1}+b''x^{m-2}$ &c. $+k'')=0$. Divisa adesso quest'equazione per $x-a$, si prova con lo stesso raziocinio, che l'equazione ..... $x^{n-1}+a''x^{m-2}+b''x^{m-3}$..... $+k''=0$ ha per il meno una radice b che la verifica, e che perciò si può sempre ridurre alla forma $(x-b)(x^{m-2}+a'''x^{m-3}+b'''x^{m-4}$ &c. $k''')=0$. Proseguendo il medesimo raziocinio, finchè il massimo esponente di x divenga $=1$, rimane dimostrato che i valori di x, i quali possono sodisfare all'equazione ..... $x^m+a'x^{m-1}+b'x^{m-2}+$&c. $+k'=0$ sono generalmente di numero m, e che perciò un'equazione qualunque contiene tante radici, quante &c.

1006. Di qui si deduce, che un'equazione qualunque $x^m+a'x^{m-1}+b'x^{m-2}$ &c. $+k'=0$ è riducibile generalmente alla forma $(x-a)(x-b)(x-c)$.....

$(x-$

$(x-\pi) = 0$ nella quale i fattori sieno di numero m, ed a, b, c &c. π sieno le radici dell'equazione.

1007. *Scol.* 1.° Tutti questi m valori dell'incognita x, non è già che appartengano sempre al problema da cui è derivata l'equazione, ma taluni appartengono al problema contrario, come generalmente avviene dei valori negativi; ed alcuni non servono a verun problema, perchè sono immaginarj.

La ragione di questo è, che nell'esprimere le condizioni di un problema, ordinariamente vengono espresse insieme con esse diverse altre condizioni, che per conseguenza si riferiscono a diversi problemi; ovvero da questo dipende, che nel trattare le condizioni secondo i Metodi dell'Analisi, l'equazion finale che si ottiene, non differisce dall'equazion finale di altri problemi. Questa proprietà dell'Analisi di presentare, oltre i valori immaginarj, tutti i valori che possono sodisfare al problema, e quelli, che possono sodisfare al contrario, che che dicano alcuni mal augurati Algebristi, ella è non solamente una ricchezza soverchiamente incomoda, come l'appella il Ch. Signor Cav. Lorgna, ma è un difetto dei più perniciosi ai progressi dell'Analisi. Difatto è per quest'abbondanza di valori, che molte volte non può l'Analista sciogliere il problema in verun modo, come il più delle volte succede, quando l'equazion finale, per cagione dei valori accessorj, va oltre il 4.° grado. Essi sono questi valori incomodi, e niente richiesti dal Geometra, che privano il medesimo di quelli, che bramerebbe.

In una parola, acciocchè la moltiplicità de' valori accessorj si potesse annoverare fra i pregj dell'Analisi, converrebbe, come l'accennò il grand'

Alembert (*Encyclop. impr. a Lucques § equation*), che si avessero de' metodi generali per la soluzione dell' equazioni di qualunque grado. *Pour moi, dic'egli, je ne puis m'impêcher d'avouer, que cette richesse pretendue me paroit un inconvenient.* Non è però vero in generale ciò che egli aggiunge, cioè, che quando le radici di un' equazione sono tutte negative, l' inconveniente sia più apparente, che reale; perchè mutato il senso della questione, le radici divengono tutte positive. Suppon'egl'infatti che i valori positivi appartengano tutti alla soluzione del problema proposto, e questo non è vero generalmente. Sia proposto, per esempio, il problema: Trovare un numero, da cui tolta la radice quadra del suo decuplo la differenza sia = 20. Per la soluzione di questo, si ha l' equazione $x - \sqrt{10x} = 20$, che tolti i radicali diviene della forma $x^2 - 50x + 400 = 0$. Proposto il problema contrario: Trovare un numero a cui aggiunta la radice del suo decuplo, la somma sia = 20, mettendolo in equazione si ha l'equazione $x + \sqrt{10x} = 20$, che tolti i radicali prende la forma dell' equazione precedente $x^2 - 50x - 400 = 0$. Ecco pertanto due problemi contrarj, che vengono sciolti dalle radici di una stessa equazione, la quale per ciò che vedremo qui appresso, ha le radici ambedue positive: è certo poi, che tali radici non possono ambedue sodisfare a ciascuno de' proposti problemi; e se ne ha di questo una prova decisiva anche dall'Analisi, come si avrà luogo di vedere nella IV. Parte. E' dunque evi-

den-

dente, che le radici positive non appartengono generalmente al solo problema proposto.

1008. La formola generale dell'equazioni esposta di sopra $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-r)=0$ conduce naturalmente a discoprire alcune proprietà interessanti dell'equazione.

1009. Essa ci mostra primieramente, che la sostituzione di una radice qualunque in luogo dell'incognita, verifica generalmente l'equazione, con la distruzione de' termini. Difatto sostituendo per x uno qualunque de' valori a, b, c &c. si ha sempre un fattore $=0$, e perciò il prodotto $=0$.

1010. Ci fa vedere in secondo luogo che un'equazione qualunque non è altro, in ultima risoluzione, che un prodotto di equazioni semplici, (ed è questo un Teorema scoperto da Hariot), e che perciò equivale ancora al prodotto di varie opportune equazioni di 1.°, 2.°, 3.° &c. grado. L'equazione $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$ per esem. è $=(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)=(x^2-3x+2)(x-4)(x+4)=(x^3-6x^2+11x-6)(x+4)=$ &c. dove le forme diverse, non compresa la prima, sono dodici.

1011. Dunque un'equazione zero è sempre divisibile per qualunque fattore, che sia formato dell'incognita accresciuta, o diminuita di ciascuna radice. Questa verità si può dimostrare anche nella seguente maniera.

Sia $E=0$ un'equazione qualunque: sia $x=r$, e perciò $x-r=0$ sia un fattore di E, e sia se è possibile $\frac{E}{x-r}=Q+\frac{R}{x-r}$, dove R sia un residuo.

Essendo $Q+\frac{R}{x-r}=0=Q(x-r)+R$, siccome $x-r$

 è per

è per ipotesi $=0$; ne segue che sia $Q(x-r)=0$; dunque anche R dee esser tale, e per conseguenza $\frac{E}{x-r}$ non può dare un quoziente Q, con un residuo R: valé a dire, che E sempre è divisibile per un suo fattor qualunque $x-r$.

1012. *Scol.* Dal Teorema antecedente si è veduto esser $x=a,b,c$&c. eguale cioè a ciascuna radice dell' equazione a cui appartiene. Qui però si dee avvertire con *M.* d' Alembert, (*Encycl. art. Equation*) che non si dee giá intendere, che sia x eguale nel tempo stesso ad a, b, c &c. che è assordo,ed importerebbe, che in un'equazione di 2.° grado per esempio,il termine x^2 non fosse un quadrato, ma un rettangolo; ma si dee ciò intendere in questo senso, che l'espressione $(x-a)(x-b(x-c)\ldots\ldots$, $(x-\pi)$ può esser $=0$ in tanti casi particolari, quante sono le radici; ed in questo senso, che x è un segno indeterminato, il qnale non rappresenta nè a, nè b, nè c &c. ma può soltanto rappresentar ciascuna di esse in particolare.

1013. *Teor.* In qualunque equazione il coefficiente del 2.° termine è uguale alla somma delle radici prese col segno contrario; il coefficiente del 3.° termine è uguale alla somma dè prodotti a due delle medesime radici; il coefficiente del 4.° è uguale alla somma dè prodotti a tre di tutte le radici col segno mutato, e cosi inseguito, fino all' ultimo, che dee esser uguale al prodotto di tutte le radici.

Dimostrazione. Questo Teor. si suol dimostrare generalmente per induzione con uno dé due metodi che seguono.

Met.

Met. I. Siccome ogni equazione si riduce alla forma ... $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \ldots (x \pm \ldots) = 0$, facciasi la moltiplicazione successiva dei fattori, e si avrà pigliando due soli fattori $x^2 \pm (a+b)x + ab = 0$, equazione generale di secondo grado, nella quale il coefficiente del 2.° termine uguaglia la somma delle radici col segno mutato, e l'omogeneo eguaglia il loro prodotto. Si faccia il prodotto di tre fattori, e si avrà un' equazione generale di terzo grado, della forma ..... $x^3 \pm (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x \pm abc = 0$, in cui si hanno le qualità divisate. Nel modo stesso, facendo il prodotto di quattro fattori onde si abbia un' equazione generale di 4.° grado ..... $x^4 \pm (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \pm (abc+abd+bcd+acd)x + abcd = 0$, che ha parimente le condizioni proposte; Così proseguendo si può concludere in generale &c. &c. Questo è il metodo stesso, che fu da noi esposto nel Lemma 2.° *n.* 506., ma con un raziocinio un poco diverso, e forse non tanto evidente.

Met. II. Sia l'equazione generale $x^m + a'x^{m-1} \ldots + K' = 0$ e sieno le sue radici a, b, c &c. Queste si sostisuiscano in luogo dell' incognita, e si avranno l' equazioni particolari .....

$$a^m + a'a^{m-1} + b'a^{m-2} + \text{ \&c. } K' = 0$$
$$b^m + a'b^{m-1} + b'b^{m-2} + \text{ \&c. } K' = 0 \ldots\ldots (M)$$
$$c^m + a'c^{m-1} + b'c^{m-2} + \text{ \&c. } K' = 0$$
&c. &c.

Pongasi $m = 2$, e si prendano due dell' equazioni addotte, onde si abbia $a^2 + a'a + b' = 0$, ... $b^2 + a'b + b' = 0$. Si paragonino i valori di b', e si avrà $a^2 + a'a = b^2 + a'b$, onde si deduce .....

$a' =$

$a' = \frac{b^2 - a^2}{a - b} = -(a+b)$. Si sostituisca questo valore in una dell'equazioni antecedenti, per esempio nell' equazione $b^2 + a'b + b' = 0$ e si avrà $b' = +b^2 \ldots + ab - b^2 = +ab$, come si richiede. Pongasi adesso $m = 3$. Saranno le radici a, b, c, e perciò si avranno le tre trasformate ... (M). Da ciascuna si deduca il valore di K', che in questo caso equivale a c', e si avranno l'espressioni $K' = \ldots - a^3 - a'a^2 - b'a = -b^3 - a'b^2 - b'b = -c^3 - a'c^2 \ldots - b'c$. Dalla prima di quest' equazioni si ha trasponendo $b'b - b'a = a^3 + a'a^2 - b^3 - a'b^2$, e dalla seconda si ha $b'b - b'c = c^3 + a'c^2 - b^3 - a'b^2$. Dividendo per $b - a$ la prima, e per $b - c$ la seconda, si ottengono le due seguenti espressioni di b', cioè $b' = \frac{a^3 + a'a^2 - b^3 - a'b^2}{b - a}$ e si ha per conseguenza $b' = \frac{c^3 + a'c^2 - b^3 - a'b^2}{b - c}$

$$\frac{a^3 + a'a^2 - b^3 - a'b^2}{b - a} = \frac{c^3 + a'c^2 - b^3 - a'b^2}{b - c} \ldots$$

equazione da cui tolte le frazioni, trasposti in un membro tutti i termini affetti da a', e diviso tutto per ciò che la moltiplica, si trova finalmente $a' = \frac{ac^3 - bc^3 - ab^3 + ba^3 - ca^3 + cb^3}{ac^2 - ab^2 - bc^2 + ba^2 + cb^2 - ca^2} = \ldots a - b \ldots c$

Si ponga questo valore in una dell' espressioni di b', e si avrà $b' = \frac{-ab^2 - cb^2 + ba^2 + ca^2}{a - b} \ldots\ldots = ab + ac + bc$: sostituiscansi finalmente i valori di c',

c^{I}, e sarà $c^{I} = -abc$; e così in seguito si può estender la dimostrazione all' equazioni superiori.

Il medesimo Teorema si può dimostrare con un terzo Metodo, la di cui induzione è molto più concludente, e rigorosa dei Metodi addotti: esso è il seguente.

Met. III. Sia la solita equazione generale ..... $(\mathcal{A})\ldots x^{m}+a^{I}x^{m-1}+b^{I}x^{m-2}+c^{I}x^{m-3}\ldots+K^{I}=0$, che abbia le medesime radici a, b, c &c. Si divida per un suo fattore $x \pm a$, e si avrà la risultante della forma ..... $(\mathcal{A}^{I})\ldots x^{m-1}+a^{II}x^{m-2}+b^{II}x^{m-3}$; &c. $K^{II}=0$. Questa si divida per un suo fattore $x \pm b$, onde si abbia la risultante..... $(\mathcal{A}^{II})\ldots\ x^{m-2}+a^{III}x^{m-3}+b^{III}x^{m-4}$ &c. $K^{III}=0$. Si divida pur questa per un fattore $x \pm c$, e si avrà $(\mathcal{A}^{III})\ldots\ x^{m-3}+a^{IIII}x^{m-4}+b^{IIII}x^{m-5}$ &c. $K^{IIII}=0$, e così in seguito. Si moltiplichi adesso l'equazione $(\mathcal{A}^{I})$ per $x \pm a$ la risultante.....

$x^{m}+a^{II}x^{m-1}+b^{II}x^{m-2}+c^{II}x^{m-3}$ .....

$+ax^{m-2}+a^{II}ax^{m-2}+b^{II}ax^{m-3}\ldots\pm K^{II}a=0$.....

dee essere uguale alla proposta $(\mathcal{A})$, e perciò debbon esser eguali i coefficienti omologhi di ambedue. Dee pertanto aversi $a^{II}+a=a^{I}$, $b^{II}+a^{II}a=b^{I}$, $c^{II}+b^{II}a=c^{I}$; $K^{I}a=K^{I}\ldots$ (Z) Si moltiplichi nel modo stesso l'equazione A^{II} per il fattore $x \pm b$, ed il risultato si paragoni coll' equazione $(\mathcal{A}^{I})$. Si avrà primieramente la risultante

$x^{m-1}+a^{III}x^{m-2}+b^{III}x^{m-3}+c^{III}x^{m-4}$.....

$+bx^{m-2}+a^{III}bx^{m-3}+b^{III}bx^{m-4}\ldots+K^{III}b=0$.....

e fatto il paragone de' termini omologhi si ottiene $b^{III}+b=a^{II}$, $b^{III}+a^{III}b=d^{II}$; $c^{II}+b=c^{II}$ &c..... $K^{III}b^{III}=K^{II}$. Si passi a moltiplicare l'equazione $(\mathcal{A}^{III})$ per il fattore $x \pm c$, e se ne paragoni il risulta-

to coll' equazione (A^{II}) . Si avrà.....

$x^{m-2}+a^{III}x^{m-3}+b^{IIII}x^{m-4}+c^{IIIII}x^{m-5}$.....

$+cx^{m-3}+a^{III}cx^{m-4}+b^{IIII}cx^{m-5}$....$+cK^{IIII}=0.$

Quindi $a^{IIII}+c=a^{III}$; $b^{IIII}+a^{III}c=b^{III}$; $c^{IIIII}+b^{IIII}c=c^{III}$ &c. $cK^{IIII}=K^{III}$. Si prosegua in questa maniera finchè si giunga ad un equazione(A^{m-1})che sia l' ultima: indi si sostituiscano nelle prime equazioni (Z) i valori di a^{II}, b^{II}, c^{II} &c. nell'espressioni di questi valori si sostituiscano i valori di a^{III}, b^{IIII}, c^{IIII} &c. presi dalle successive equazioni de' coefficienti omologhi e così in seguito, e si troverà finalmente $a^{I}=-(a+b+c)d$ &c., $b^{I}=ab+ac$ &c. $+bc$ &c., $c^{I}=-(abc+acd$ &c. $+bcd$ &c.); $K^{I}=\pm abcd$ &c.

1014. Dalla scoperta natura dei coefficienti si possono dedurre molte utili conseguenze.

I. Che date le radici, sono determinati i coefficienti, e viceversa . Perciò qualora sieno indeterminati i coefficienti, se ne può fissare il valore in qualunque modo, perché potendo aver le radici qualunque valore, di altro non si tratta che di verificar l'equazione colla distruzione de' suoi termini. Questo mostra più chiaramente la verità di ciò, che si disse al (*n*. 81.)

II. Che se in un' equazione manca il secondo termine, le radici sono in parte positive, ed in parte negative, e la somma dell'une, uguaglia quella dell'altre.

III. Che se manca il terzo termine, le radici sono parte positive, e parte negative, ed il prodotto delle positive nelle negative eguaglia il prodotto di quelle, che sono affette dal segno stesso, prese però sempre le radici a due; e così degli altri termini, nei quali i prodotti delle radici sono

presi

presi a tre a tre, a quattro a quattro, e così per ordine successivamente, finchè si arrivi all' ultimo termine, il quale siccome uguale al prodotto di tutte le radici, affinchè svanisca, si richiede che una almeno delle radici sia eguale a zero

IV. Che se manca qualche termine, le radici debbon aver segni diversi.

V. Che se la somma delle radici positive supera quella delle radici negative, il secondo termine, a motivo della mutazione del segno, dee esser negativo, e viceversa.

VII Che l'ultimo termine, nel caso che le radici sieno tutte dotate del medesimo segno, e di numero pari, dee esser positivo, e negativo qualora sieno di numero impari,

VII. Che qualora le radici di un'equazione sieno tutte uguali, nel qual caso essa è una potenza, il coefficiente del secondo termine dee esser eguale all'unica radice, che sia per esempio a, presa tante volte, quante unità contiene il grado dell' equazione, il quale chiamandolo n, si ha il coefficiente divisato espresso per na. Per la stessa ragione il coefficiente del 3.° termine dee essere $n\frac{(n-1)}{2}a^2$; il coefficiente del 4.° termine dee essere $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^3$, e così in seguito, a tenore della formola del Binomio. E' questa un'altra dimostrazione induttiva del Teorema Newtoniano sulla formazione delle potenze, ma non è punto diretta come pretende il Sig.r Tommasini (*Introductio in Algeb.* n. 420) perchè diretta non è la determinazione de' coefficienti, da cui deriva.

VIII.

VIII. Che in un' equazione, la quale abbia una radice della forma $a-b\sqrt{-1}$, dee averne un' altra della forma $a+b\sqrt{-1}$, altrimenti la somma delle radici, la somma dei loro prodotti *a* due, *a* tre &c. vale a dire i coefficienti dell' equazione, sarebbero immaginarj, il che è contrario all' ipotesi che si fa, che un' equazione finale sia spogliata di ogni irrazionalità. Si può però dimostrare la verità di questo corollario nella maniera seguente.

Sia $x+p+q\sqrt{-1}=0$ un fattore di un' equazione, ed un altro ne sia $x+m+n\sqrt{-1}=0$. In essa dovrà contenersi il prodotto..... $x^2+mx+nx\sqrt{-1}+pm-qn+pn\sqrt{-1}$ ed in $+px+qx\sqrt{-1}$ $+qm\sqrt{-1}$ questo, affinchè l'equazione a cui appartiene sia razionale, si dee distruggere l' irrazionalità, e perciò dee essere $nx\sqrt{-1}+qx\sqrt{-1}+pn\sqrt{-1}+qm\sqrt{-1}=0$ overo $nx\sqrt{-1}+qx\sqrt{-1}=0$ e.... $pn\sqrt{-1}+qm\sqrt{-1}=0$ perchè in virtù della prima equazione, svanirebbe l' irrazionalità solamente per un valor particolare di *x*, e non in generale come si richiede. Ma dalle due seconde equazioni si ha $n=-q$, ed $m=p$; dunque i due fattori proposti debbon esser della forma $x+p+q\sqrt{-1}=0$, $x+p-q\sqrt{-1}=0$.

Le radici immaginarie vanno dunque a coppia, e se abbiasi una radice qualunque $A+B\sqrt{-1}$, dee aversene un' altra, come $A-B\sqrt{-1}$. Quindi

1015. *Teor.* Un' equazione di grado impari dee per il meno avere una radice reale.

La verità di questo Teorema si può però dimostrare nel modo seguente. Sia l'equazione ..... $x^{2n+1} \pm Ax^{2n} \pm Bx^{2n-1}$ &c. $\pm K = 0$; si ponga il primo membro $= y$, ed $x^{2n+1} \pm$ &c. $\pm K = y$.. (*A*) sarà l' equazione di una curva. Si faccia $x = \infty$ e si avrà..... $y = x^{2n+1}$; si faccia $x = -\infty$; e si avrà $y = -x^{2n+1}$; Ora la curva espressa dall'equazione (*A*) è una curva tutta reale, e continua, perché a qualunque valore di x corrisponde sempre un valor reale di y: fra gl' infiniti valori di x si comprendono ∞ e $-\infty$; questi fanno passare y dal positivo al negativo; dunque vi dee essere un valor reale di x, il quale riduca $y = o$, perchè il passaggio dal positivo al negativo in una funzione intera non si può fare che per zero. Dunque v' è sempre un valor reale di x, e perciò &c.&c.

1016. *Teor.* Un'equazione di grado pari, che abbia tutte le radici immaginarie, o tutte le radici eguali, ha sempre l' ultimo termine positivo.

Dimostrazione. Difatto il prodotto di due radici immaginarie corrispondenti $A + B\sqrt{-1}$ ..... $A - B\sqrt{-1}$ è $A^2 + B^2$, e le potenze pari sono sempre positive.

1017 Quindi un' equazione di grado pari, che abbia l' ultimo termine negativo, dee per lo meno avere due radici reali, e di queste una positiva, e l'altra negativa ed un' equazione di grado impari, che abbia l' ultimo termine negativo dee per lo meno avere una radice reale positiva.

1018. *Teor.* Se in un' equazione, che abbia tutte le radici immaginarie, si sostituisca in luogo dell' incognita, qualunque quantità, la somma de'

ter-

termini risulta sempre positiva. *Dimostrazione.* Il prodotto di due qualunque fattori immaginarj corrispondenti, come $x \pm A + B\sqrt{-1} = 0$; $x \pm A - B\sqrt{-1} = 0$, è $x^2 \pm 2Ax + A^2 + B^2$. Ora se in questo pongasi per x una quantità qualunque n, ò $-n$, il prodotto $n^2 \pm 2An + A^2 + B^2$ rimanane sempre positivo, per cagione che il quadrato..... $n^2 \pm 2An + A^2$ è sempre di sua natura positivo. Il prodotto di uno di questi fattori quadratici, per un altro qualunque di tali fattori, dee risultar positivo, e così in seguito: perciò &c.

1019. Da questo ne proviene che qualora per la sostituzione di diversi valori in luogo dell'incognita, in un'equazione qualunque, le somme de'termini risultino di segno diverso, ne proviene dissi, che una tal equazione debba necessariamente contenere delle radici reali. Perciò

I. Un'equazione di grado impari, che abbia l'omogeneo di comparazione negativo come ..... $x^{2n+1} \pm Ax^{2n} \pm Bx^{2n-1} +$ &c, $-\xi = 0$ dee necessariamente avere una radice reale positiva. Difatto se pongasi $x = \infty$, la somma de'termini è x^{2n+1}, e se pongasi $x = 0$, è $-\xi$.

II. Un'equazione di grado impari, che abbia l'omogeneo positivo, dee aver per lo meno una radice reale negativa. Ed infatti, mutati i segni nei siti pari, l'ultimo termine divien negativo, ed ha perciò una radice reale positiva; ma la mutazione de'segni nei siti pari muta il segno di tutte le radici, come si può verificar facilmente: dunque &c.

III. Finalmente un'equazione di grado pari, che abbia l'ultimo termine negativo, ha per lo meno due radici reali, delle quali una è positiva, e l'altra

tra è negativa. La prima parte è manifesta per il numero 1. La seconda si fa evidente operando come al numero 2.

1019. *Teor.* Quante radici reali, e diseguali si hanno in un'equazione, altrettante variazioni di segno si possono ottenere nella somma de'termini dell' equazioni, risultanti dalle sostituzioni di opportuni valori reali, in luogo dell'incognita.

Dimostrazione. Ogni equazione si può rappresentare colla formola $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$&c. $= 0$, supposto, che le sue radici sieno a,b,c,d &c. e queste tutte positive; Si faccia l'ipotesi, sempre possibile, che sia $a<b<c<l$ &c. e si sostituisca in luogo di a una quantità $a^{I}>a$, e $<b$; nella risultante $(a^{I}-a)(a^{I}-b)(a^{I}-c)$ &c. $=$ o il primo fattore soltanto è positivo, e gli altri sono tutti negativi. Si sostituisca a^{II} per x e sia $a^{II}<a$; nella risultante $(a^{II}-a)(a^{II}-b)(a^{II}-c)$ &c. $=$ o tutti i fattori sono negativi; perciò la somma de' termini della prima trasformata, risulta di segno diverso dalla somma de'termini della seconda.

Si ponga b^{II} per x, che sia $>a$ e $<b$, e si avrà il primo fattore solamente positivo; si ponga b^{I} per x, che sia $>b$, e $<c$, ed i primi due fattori saranno positivi, gli altri tutti rimanendo negativi. Si avrà perciò una seconda variazione di segno nella somma de'termini delle due risultanti. Si prosegua lo stesso raziocinio, e si concluderà &c.

Le stesse variazioni di segno si posson ottenere però anche in un'altra maniera, con porre cioè $a^{I}<a$, e $a^{II}>c$, $a^{I}>a$, e $a^{II}>e$ &c. con porre $b^{I}<b$, e $b^{II}>d$, $b^{I}<b$, e $b^{II}>f$ &c. cosicchè le quantità sostituite comprendano due per due un numero sempre impari di radici.

1020. *Scol.* E' facile a vedersi, che quante si hanno radici immaginarie, tante variazioni di segno debbon mancare. Difatto si sa che i fattori immaginarj, debbon esser sempre di numero pari, e della forma $x+A+B\sqrt{-1}$, $x+A-B\sqrt{-1}$, e si sa inoltre, che il prodotto di due fattori immaginarj corrispondenti, dee risultar sempre positivo.

1021. *Teor.* Se in un'equazione, che abbia delle radici reali, si sostituiscano in luogo dell'incognita due quantità, le quali cadano fra due radici reali contigue, ovvero comprendano dentro di se un numero pari di radici reali, la somma de' termini delle trasformate, non può risultare di segno diverso.

Dimostrazione. La Dimostrazione di questo è simile a quella del Teor. precedente.

1022. *Teor.* Un'equazione qualunque è divisibile di sua natura in fattori tutti quadratici, qualora sia di grado pari, ed in fattori quadratici, ed un fattor lineare, qualora sia di grado impari.

Dimostrazione. Cominciando dall'equazioni di grado pari, se le radici sieno tutte reali, il Teorema è manifesto. Se tutte sieno immaginarie, siccome ciascuna coppia di esse dee esser della forma $A+B\sqrt{-1}$, $A-B\sqrt{-1}$, ed il prodotto di due fattori di questa natura è sempre un fattor quadratico reale, ne segue, che l'equazione si possa dividere in fattori tutti quadratici.

Qualora le radici fossero in parte reali, ed in parte immaginarie, siccome queste debbon esser di numero pari, e della forma $A+B\sqrt{-1}$, $A+B\sqrt{-1}$ torna la dimostrazione addotta di sopra.

Ri-

Rimane il caso dell'equazioni di grado impari. In queste si è veduto (*n.* 1018.) che vi dee essere una radice reale per lo meno; dunque basta dividerle per il fattor reale di primo grado, che vi si contiene, e la risultante essendo di grado pari, avrà luogo ciò, che si è detto di sopra.

1023. *Teor.* Un'equazione, che abbia tutte le radici razionali, e che non contenga verun termine fratto, non può avere alcuna radice fratta.

Dimostrazione. Sia l'equazione ..... $x^n \pm Ax^{n-1} \pm Bx^{n-2}$ &c. $= 0$, ed abbiasi se è possibile $x = \frac{p}{q}$, essendo p, e q primi fra di loro. Sostituendo si avrà $\frac{p^n}{q^n} \pm \frac{Ap^{n-1}}{q^{n-1}} \pm \frac{Bp^{n-2}}{q^{n-2}}$ &c. $= 0$. Si moltiplichi per q^{n-1}, e si otterrà $\frac{p^n}{q} \pm Ap^{n-1} \pm Bp^{n-2}q \pm$ &c. $= 0$. Ma $\frac{p^n}{q}$ è una frazione, perche p non è divisibile per q (§ 47. num. 3); dunque risulta $\frac{p^n}{q} = \mp Ap^{n-1} \mp Bp^{n-2}q$ &c. cioè una frazione propria eguale ad un intero.

1024. Ho avvertito, che l'equazione non dee contener veruna radice irrazionale, perche altrimenti è falso il Teorema, mentre si possono avere delle radici fratte, senza, che nell'equazione esista verun termine fratto. Si vedrà per esempio a suo luogo, che l'equazione $x^2 + x - 5 = 0$ ha due radici fratte $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$. Non è però, che in

questo caso abbia luogo verun assordo, perchè essendo $\frac{p}{q} = x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$, il secondo membro rappresentato qui sopra per $\mp Ap^{n-1} \mp Bp^{n-2}q \mp$ &c. contiene il termine $\sqrt{21}$, il quale include una frazione, e perciò risulta frazionario ciascuno de' due membri. Questo non è stato avvertito dal Signor D. Tommasini, e perciò è falsa la proposizione, che dimostra al (*n.* 435.) del 2.° Tomo della sua Opera: *Introductio in Algebram*.

1025. *Teor.* Un'equazione la quale abbia tutte le radici razionali, se ne abbia qualcheduna che sia fratta, dee contenere qualche termine fratto.

Dimostrazione. La verità di questo Teor. deriva dall'antec.

1026. *Teor.* Un'equazione che abbia tutte le radici reali, e positive, ha i segni alternativamente positivi e negativi; e se abbia tutte le radici reali negative, ha tutti i termini positivi, e viceversa.

Dimostrazione. Si faccia il prodotto dei fattori $x-a$, $x-b$. Il risultato è $x^2 - ax + ab$; questo $-bx$ prodotto si moltiplichi per $x-c$, e si avrà ..... $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$: si prosegua la stessa operazione, e si vedrà che si hanno sempre i segni alternativi. La seconda parte è per se manifesta, perchè il prodotto di fattori come $x+a$, $x+b$, $x+c$ non può contenere alcun segno negativo.

1027. Generalmente, in un'equazione che non contenga radici immaginarie, quante si hanno alternazioni di segno, tante si hanno radici positive; e quan-

quante consecuzioni di segno, tante si hanno radici negative. La dimostrazione diretta, e completa di questo Teor. la daremo a suo luogo.

1028. *Teor.* Se la soluzione di un'equazione conduca ad un risultato assordo, il problema da cui una tal equazione è derivata dee contenere qualche contradizione.

Dimostrazione. L'equazion finale di un problema non e altro, che un'espressione delle condizioni del problema insiem combinate; dunque se in una tal espressione v'abbia qualche cosa impossibile, ò contradittoria, siccome la deduzione dell' equazion finale si suppon fatta legittimamente, conviene che derivi dal problema stesso.

1029. *Teor.* Se un' equazione presenti i valori dell'incognita in parte positivi, ed in parte negativi mutando le condizioni del Problema nelle contrarie, i valori positivi divengon negativi, e viceversa.

Dimostrazione. I valori negativi dell' incognita servono al problema contrario a quello da cui è derivata l'equazione; del che uno se ne potrà convincere facilmente in appresso; dunque cangiando il problema nel suo contrario, i valori che gli debbon soddisfare, debbon esser quelli, che dianzi erano negativi; perciò debbon essi divenir positivi, e viceversa.

1040. *Teor.* Se un'equazione conduca a dei risultati immaginarj, cangiato il problema nel suo contrario, la medesima equazione può condurre a dei risultati reali.

Dimostrazione. Cangiando il problema nel contrario, cioè cangiando nelle contrarie le condizioni che lo costituiscono, può avvenire che la funzione compresa sotto il radicale di esponente pari,

da cui deriva l'immaginarietà, di negativa diventi positiva, a cagione della mutazione di segno, che succede nelle costanti date; onde rimane evidente che &c. &c.

1031. *Teor.* Da un'equazione di grado impari >1 non si può dedurre una formola generale, che rappresenti i valori dell'incognita, e sia priva d' immaginarietà.

Dimostrazione. Niuna formola generale dedotta dalle sole proprietà di un'equazione, la quale contenga più radici, e queste reali, può rappresentare una delle radici, piuttosto che un'altra, perchè ciascuna ha il medesimo rapporto all'equazione a cui appartiene, ed egualmente ne adempie le condizioni. Ma da un antecedente, il quale sia indifferente a più conseguenti, non se ne può dedurre piuttosto un conseguente, che un altro, dunque una formola, che rappresenti generalmente il valore dell'incognita, ò dee rappresentar tutti i suoi valori, ò non ne dee rappresentar veruno: ma è impossibile, che una formola Algebrica rappresenti un numero impari di valori reali >1. Dunque &c.

Che una formola algebrica non possa rappresentare un numero di valori reali >1 è manifesto.

Difatti, ò essa non contiene alcun radicale, ed è chiaro che non può aver più di un valore: ò contiene dei radicali di esponente impari, e siccom'essi non possono avere più di un valor reale, neppur la formola può contenerne di più: o contiene dei radicali di esponente pari, ed in questo caso, siccome essi posson aver due soli valori reali, non più di due ne potrà ricever la formola. E' dunque impossibile, che si abbia una formola che rappresenti tutti i valori reali dell' incognita; dunque non ne dee rappresentar veruno; dunque dee essere immaginaria. Ge-

Generalmente, da un'equazione la quale contenga un numero di radici reali >2, non si può dedurre una formola, che rappresenti tutti i valori reali dell'incognita, e perciò l'espression generale di essa dee contener degl'immaginarj.

1032. *Scol.* Il dottissimo Signor Nicolò de Martino si oppone al nostro Teorema dicendo, che l'analisi può benissimo somministrare una formola che rappresenti un numero di valori reali >2, altro non richiedendosi che essa gli rappresenti con una formola indeterminata. *Nonne* (egli dice *Algeb. T. II. Lib. 2. Cap. 7. pag. 349.*) *in reductione æquationum quarti gradus novimus quantitatem determinandam per æquationem simplicem, quam multiplex esse debet, sic per Analysim designari ut prodeat adhuc indeterminata?* Noi gli rispondiamo che l'indeterminazione della formola, che egli suppone possibile, dovrebb'esser prodotta da qualche fattore indeterminato di uno de' coefficieti dell'equazione proposta, altrimenti la determinazione di essa non dipenderebbe dal problema. Ora la determinazione di un tal fattore, eseguita in tante diverse maniere, quante sono le radici reali dell'equazione data, generalmente parlando involve la stessa difficoltà, che il ritrovamento delle radici, e dipende dalla soluzione di un problema determinato, del medesimo grado del problema proposto: per conseguenza la formola di cui si tratta sarebbe indeterminata solo in apparenza, onde non è possibile ciò che egli asserisce.

Il finqui detto verrà messo in maggior lume dalla soluzione dell'equazioni di terzo, e quarto grado a radici tutte reali, ed ivi scioglieremo la difficoltà dedotta dalla riduzione dell'equazioni di quarto grado.

1033. *Teor.* Un' equazione della forma ..... $x^{2n}+Ax^{2n-2}+Bx^{2n-4}$ &c. $=0$ è generalmente impossibile. Difatto, qualunque valore positivo, o negativo si sostituisca per x, il risultato è sempre >0.

1034. *Teor.* Se abbiasi un' equazione della forma $a\pm b\sqrt{\pm c}=a'\pm b'\sqrt{\pm c'}$ dovrà esser $a=a'$ ..... $\pm b\sqrt{\pm c}=\pm b'\sqrt{\pm c'}$

Dimostr. Essendo $a\pm b\sqrt{\pm c}=a'\pm b'\sqrt{\pm c'}$ sarà ancora $a-a'=\pm b'\sqrt{\pm c'}\mp b\sqrt{\pm c}$; ma la differenza di due quantità è sempre omogenea con le quantità stesse: dunque dovrebb' essere una quantità razionale, eguale ad una quantità irrazionale; ora l' equazione dee per ipotesi sussistere; questo non può avvenire, che nel caso in cui sia $a-a'=0$ e $\pm b'\sqrt{\pm c'}\mp b\sqrt{\pm c}=0$, dunque &c. &c.

1035. *Teor.* Se abbiasi una equazione in cui manchi uno dei termini intermedj fra il primo, e l'ultimo, e i termini immediatamente contigui, sieno dotati del segno stesso, essa dee contenere necessariamente delle radici immaginarie.

Dimostrazione. La verità di questo Teorema, la dimostreremo per induzione per l'equazioni di 2.°, 3.°, e 4.° grado, che sono l'equazioni trattabili con metodo generale.

1.° Un equazione di 2.° grado mancante del 2.° termine si riduce alla forma $x^2\pm p=0$, ed il segno dei due termini dovendo essere per ipotesi il medesimo, si ha $x^2+p=0$, o sia $x=\pm\sqrt{-p}$, due valori di x ambedue immaginarj.

2.° Sia un' equazione di 3.° grado, e si supponga mancante il secondo termine (il raziocinio è

lo

lo stesso per la mancanza degli altri). In questo caso una delle radici dovrà esser positiva, ed eguale alle altre due negative, o viceversa: sieno pertanto le radici $a, b, -c$, ovvero $-a, -b, c$. Il coefficiente del 3.° termine sarà $ab-ac-bc$; ma essendo $a+b=c$, bc è $>ab$; dunque $ab-ac-bc$ dee essere una quantità negativa, perciò i due termini, che comprendono il 2.° termine mancante, debbon essere di segno diverso, giacchè il primo termine è sempre positivo; e se il terzo termine sarà positivo, si avranno necessariamente delle radici immaginarie.

3.° Abbiasi un' equazione di quarto grado. Affinchè manchi il secondo termine, o tre radici debbon esser positive, ed uguali alla quarta negativa, o viceversa; ò due positive, e due negative di somma eguale, onde i quattro casi possibili sono, $a, b, c, -d$; $-a, -b, -c, +d$; $a, b, -c, -d, -a, -b, c, d$. Nel primo, e nel secondo caso il coefficiente del 3.° termine sarà, $ab, ac, bc, -ad, -bd-cd$, ma essendo $a+b+c=d$, dee essere $ad>ab$, $cd>ac$, $bd>bc$, e perciò ..... $(a+b+c)d>ab+ac+bc$, e il terzo termine dee essere per conseguenza negativo. Nel 3.°, e 4.° caso in cui ò $a+b=c+d$, il coefficiente del 3.° termine risulta $ab-ac-bc-ad-bd+cd$, o sia $ab+cd-(a+b)(c+d)$. Facciasi $a+b$, e perciò anche..... $c+d=r$; e si avrà $(a+b)(c+d)=r^2$, e siccome r^2 è $=(a+b)^2$ ed $=(c+d)^2$, si potranno determinare i valori di ab, e di cd, affine di conoscere se $ab+cd-(a+b)(c+d)$ debba essere una quantità positiva, o negativa. L'equazione $r^2=a^2+2ab+b^2$ dà permezzo dell'antitesi $2ab=r^2-a^2-b^2$, e dividendo per

2, $ab = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{2}$: per la stessa ragione l'equazione $r^2 x = c^2 + 2cd + d^2$, dà $cd = \frac{r^2 - c^2 - d^2}{2}$; quindi si deduce $ab + cd = r^2 - \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2}$, e perciò si ha finalmente $r^2 > ab + cd$; ma $r^2 = (a+b)(c+d)$; dunque $ab + cd - (a+b)(c+d)$ è necessariamente una quantità negativa; dunque se il terzo termine sia positivo, cioè del medesimo segno col primo, si avranno delle radici immaginarie. La stessa dimostrazione industiva si può applicare ai casi, nei quali manchi qualunque altro termine, e si estende com' è manifesto all' equazioni di qualunque grado.

1036. *Probl.* Determinare se in un' equazione esistano delle radici immaginarie. *Soluzione*.

LEMMA.

Se abbiasi un numero m di quantità reali α, β, γ, δ &c. e se ne ponga la somma $= M$, la somma dei quadrati $= N$, e la somma dei prodotti a due $= L$, dico che si ha sempre $\frac{(m-1)}{2} N > L$.

Dimostrazione. Presi i quadrati di tutte le differenze, si ottiene $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2$ &c. $+ (\beta - \gamma)^2$ &c. $= (m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ &c.) ..... $- 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$ &c. $+ \beta\gamma$ &c.) $= (m-1) N - 2L$. Ma $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2$ &c. $+ \beta - \gamma)^2$ &c. è sempre una quantità positiva; dunque lo sarà sempre anche $(m-1) N - 2L$, e sarà perciò $\frac{(m-1)}{2} N > L$.

Di qui si può dedurre che mN è sempre $> M^2$. In effet-

effetto si ha $2L = (\alpha+\beta+\gamma \&c.)^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \&c.) = M^2 - N$. Ma $(m-1)N > 2L$; dunque $(m-1)N > M^2 - N$, e perciò $mN > M^2$ come si doveva dimostrare. Si osservi che sebbene α, β, γ &c. sieno prese positive, nondimeno la dimostrazione addotta si estende ancora al caso che sieno negative; perchè i quadrati rimangono i medesimi, e la somma dei prodotti, o è la medesima in caso che dette quantità sieno tutte negative, o è minore in caso che alcune sieno positive, ed altre negative. Posto questo, vediamo adesso quali condizioni debbano aver luogo, affinchè un' equazione abbia tutte le radici reali. Sia l' equazione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Dx^{n-3}$ &c $= o$ le di cui radici di numero n, sieno a, b, c, d &c. &c. Per la natura di ogni equazione, i coefficienti ed i numeri dei termini che li compongono, saranno quali si vedono nelle Tavola annessa:

$$\left.\begin{array}{ll} A = a+b+c+d \&c. & n \\ B = ab+ac+ad+bc \&c. & \frac{n(n-1)}{2} \\ C = abc+abd+abe \&c. & \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.} \\ D = abcd+abce+ \&c. & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\&c. \quad 2. \quad 3. \quad 4} \end{array}\right\}$$

Prendansi adesso i quadrati di ciascuna di queste serie, e sia $a^2+b^2+c^2+d^2$ &c. $= P$; $a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2$ &c. $+b^2c^2$ &c. $= Q$; $a^2b^2c^2+a^2b^2d^2$ &c. $\ldots\ldots\ldots+b^2c^2d^2$ &c. $= R$; $a^2b^2c^2d^2+a^2b^2c^2e^2$ &c. $= S$ &c. &c. ed essendo $a^2+b^2+c^2$ &c. $= (a+b+c+d \&c.)^2 - 2(ab+ac+ad)$ &c. sarà $P = A^2 - 2B$. Similmente,

te, essendo $a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2$ &c. $=(ab+ac+ad$ &c.$)^2$ $-2(a^2bc+a^2bd+a^2cd$ &c.$)+2(abcd+abce+abde$ &c.$)$, si ha $\mathcal{Q}=B^2-2AC+2D$ e proseguendo lo stesso raziocinio, si vedrà che si hanno l'espressioni seguenti.

$\mathcal{P}=A-2B$

$\mathcal{Q}=B^2-2AC+2D$

$R=C^2-2BD+2BE-2F$

$C=D^2-2CE+2BF-2AG+2H$.

&c.

Dunque per il corollario del Lemma $mN>M^2$, poichè $\mathcal{P}$ tiene il luogo di N, A il luogo di M, ed n quello di m, si avrà $nP>A^2$. Per la stessa ragione $\frac{n(n-1)}{2}\mathcal{Q}>B^2$; $\frac{n(n-1)\ (n-2)}{2.\ 3.}R>C^2$ .....

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4.}S>D^2$ &c. &c. Si sostituiscano i valori di $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, R, &c. e si avrà $nA^2-2nB>A^2$, o sia $A^2>\frac{2n}{n-1}B$; $B^2>\frac{\frac{2n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(-1}{2}}(AC-D$; $C^2>$

$$\frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}}{\frac{n(n-1)(n-2)-1}{1.\ 2.\ 3.}}(BD-AE+F):D^2>\frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}}{\frac{2(n-1)(n-2)(n-3)-1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}}\times$$

$(CE-BF+AG-H)$; &c, &c. &c.

Di

Di qui si deduce una regola generale per conoscere se in un'equazione si contengano radici immaginarie. S'inalzi un binomio ad una potenza del medesimo grado, che l'equazione proposta; i coefficienti dei suoi termini si raddoppino, e si divida ciascuno di essi così raddoppiato per se stesso preso nella propria forma, e diminuito di uno; queste frazioni si scrivano rovesciate, e per ordine sopra i termini dell'equazione proposta. Se il quadrato di ciascun coefficiente della proposta moltiplicato nella frazione sovrapposta, risulti maggiore del rettangolo dei coefficienti dei detti termini prossimamente adjacenti, meno il rettangolo dei coefficienti dei due termini susseguenti ai due primi, più il rettangolo dei coefficienti dei due termini prossimamente adjacenti &c. &c. sotto un tal termine si scriva $+$, altrimenti scrivasi $-$. Compita l'operazione, quante si avranno variazioni di segno, tante si avranno radici immaginarie. Difatto, noi abbiamo veduto, che se le radici sieno tutte reali, si dee aver generalmente, detto K un coefficiente qualunque,

$$K^2 > \frac{2n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots n} \text{ moltiplicato nei rettan-}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots -1}{1.\ 2.\ 3\ldots n}$$

goli divisati. Ma quante volte si ha un segno negativo dalla addotta operazione tante volte non ha luogo questa regola; dunque &c. &c.

Si voglia sapere per esempio se l'equazione .....: $x^7-5x^6+15x^5-23x^4+18x^3+10x^2-28x+24=0$ contenga radici immaginarie. I coefficienti di un binomio inalzato alla potenza 7.ª sono 7, 21, 35, 35, 21, 7.

Quin-

Quindi l'equazione con le frazioni sovrapposte sarà

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$$
$$\frac{3}{7}\quad\frac{10}{21}\quad\frac{17}{35}\quad\frac{17}{35}\quad\frac{10}{21}\quad\frac{3}{6}$$
$$+\quad -\quad +\quad +\quad -\quad -\quad +\quad +$$

dove perchè $5^2 X \frac{3}{7} < 15.1$ si scrive $-$; perchè $15^2 X \frac{10}{21} > 23.5 - 18$ si pone $+$ e così in seguito.

1037. Questo metodo che devesi a Campbell, è più esatto di quello di Newton, che si può vedere nel fine della di lui Arimmetica Universale. Nondimeno però neppur questo è generale, poichè non ha luogo generalmente, altro che nel caso in cui indica l'esistenza di radici immaginarie; mentre, allorchè non indica veruna radice immaginaria, può avvenir che l'equazione ne contenga più d'una. Nè di questo è difficile a comprendersi la ragione. Difatto si è veduto che quando le radici sono tutte reali, i divisati rapporti debbon dare i segni tutti positivi; ma non si è provato che debba questo avvenir esclusivamente dal caso, in cui si abbiano delle radici immaginarie.

Met. 2.° Si ponga $x^2 = y$. Fatta la sostituzione, siccome nei termini affetti dalle potenze impari di x vi dee rimaner x; si pongano tutti questi termini eguali a $2x$, e gli altri, che sono affetti dalle potenze d'y si facciano eguali a P. Con questo l'equazione diverrà della forma $P + 2x = 0$: questa si moltiplichi per x, onde si abbia $Px + 2x^2 = Px + 2y = 0$, e si dedurrà $x = -\frac{2y}{P}$. Questo valore

si

si ponga per x nell' equazione $P+Qx=0$; la risultante $P^2-Q^2y=0$ sarà l'equazione trasformata in y. Quante consecuzioni avrà, tante saranno le radici negative, e perciò altrettante saranno le coppie di radici immaginarie della proposta.

1038. *Probl.* Determinar le somme di tutte le potenze, a cui possono elevarsi le radici reali di un' equazione, prese separatamente.

Soluz. Sia l'equazione $x^m-px^{m-1}+qx^{m-2}$ &c. $=0$, di cui le radici sieno a, b, c &c. Si ponga $x=\frac{1}{y}$, e l' equazione di verrà $\frac{1}{y^m}-\frac{p}{y^{m-1}}+\frac{q}{y^{m-2}}-\frac{r}{y^{m-2}}$ + &c. $=0$, e moltiplicando per y^m, $1-py+qy^2-ry^3$ &c. $=0=(1-ay)(1-cy)(1-cy)$ &c. e pres' i logarimmi $log.(1-py+qy^2-ry^3$ &c.$)=log.(1-ay)+log.(1-by)+log.(1-cy)$ &c. Quindi

$$y(-p+qy-ry^2 \text{ \&c.})+\frac{y^2}{2}(-p+qy-ry^2 \text{ \&c.})^2+\frac{y^3}{3}(-p+qy-ry^2 \text{ \&c.})^3 \text{ \&c.}=-y(a+b+c \text{ \&c.})-\frac{y^2}{2}(a^2+b^2+c^2 \text{ \&c.})-\frac{y^3}{3}(a^3+b^3+c^3 \text{ec.})\text{ec.}$$

, o sia

$$\left.\begin{array}{l} px-qy^2+ry^3 \text{ \&c.} \\ +\frac{p^2y^2}{2}+\frac{p^3y^3}{3} \text{ \&c.} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} (a+b+c \text{ \&c.})y=Ay \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2\text{\&c.})y^2=\frac{1}{2}By^2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{2pqy^3}{2} \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{3}a^3+b^3+c^3 \text{ \&c.})y^3=\frac{1}{3}Cy^3 \\ \text{\&c.} \end{array}\right.$$

Paragonati adesso i termini omologi si trova $Ay=py$, onde $A=p$, $\frac{1}{2}By^2=\frac{p^2y^2}{2}-qy^2$, o sia

$B=p^2-2q$, $\frac{1}{3}Cy^3=\frac{p^3y^3}{3}-\frac{2pqy^3}{2}+ry^3$, e però $C=p^3-3pq+3r$, &c. &c.

1038. Ma cerchiamo di trovare direttamente una formola generale.

Sia l'equazione generale $o=a-bx+cx^2-dx^3$ &c...(P) di cui le radici sieno p,q,r &c. Si avrà $a-bx+cx^2$ ec.$=a\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)$ &c.(perchè $a=pqr$ ec.) e perciò $log.\left(1-\frac{bx+cx^2-dx^3 \text{ ec.}}{a}\right)=log.\left(1-\frac{x}{p}\right)+log.\left(1-\frac{x}{q}\right)+$ &c $=Ax+Bx^2+Cx^3+$ &c. dove (434) $A=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ &c. $B=\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2q^2}$ ec. $C=\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{3q^3}+\frac{1}{3r^3}$ &c. $M=\frac{1}{mp^m}+\frac{1}{mq^m}....+\frac{1}{mr^m}$ &c.; e non resta che trovar M. Riducasi $log.\left(1-\frac{bx+cx^2-dx^3 \text{ &c.}}{a}\right)=log.\left(1-\frac{bx}{a}\right).....+log.\left(1-\frac{-cx^2+dx^3 \text{ ec.}}{a\left(1-\frac{bx}{a}\right)}\right)$, e pongasi .... $\frac{-cx+dx^3}{a}$ &c. $=X$, di maniera che si abbia $log.\left(1-\frac{bx+cx^2-dx^3}{a} \text{ &c.}\right)=log.\left(1-\frac{bx}{a}\right)+$ log.

re l'equazioni date ad una sola, che contenga una sola incognita. La seconda è di trovare il valore di tutte le altre incognite per mezzo del valore di quella, che si suppone trovata per mezzo dell'operazione antecedente. Il Metodo, che sodisfa al primo di questi problemi è ciò, che dicesi Eliminazione. Il secondo appartiene all'Analisi.

Met. 1. Il Metodo, che passiamo ad esporre consiste in questo, che ciascuna delle due equazioni date, e lo stesso vale qualora sieno più, si moltiplichi per un fattore opportuno, onde si possa far la sottrazione di una dall'altra, e così successivamente, finchè siasi eliminata una dell' incognite. Venghiamo alla pratica, e sia

2041. *Probl.* Date due equazioni di primo grado, ed altrettante incognite, trovare tante equazioni ad un'incognita sola, quante sono le incognite proposte,

Soluzione. Supponghiamo sulle prime, che due sieno l'equazioni date, $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ Si moltiplichi la prima per a', e la seconda per a; fatta la sottrazione, si ha $a'by-ab'y+a'c'-ac'=0$, equazione richiesta. Se l'equazioni sieno tre $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$, $a''x+b''y+c''z+d''=0$, si moltiplichi la prima per a', e la seconda per a: fatta la sottrazione si ha una risultante in cui manca la x. Si moltiplichi la seconda per a''; e la terza per a', e fatta la sottrazione, si avrá una risultante in cui mancherà parimente la x, e con questo è ridotta l' eliminazione al caso precedente. In una maniera simile si opererebbe se l'equazioni date fossero di maggior numero. Ecco una regola generale, per cui si ottiene l'intento con maggior semplicità.

Si moltiplichi ciascuna dell' equazioni date per il prodotto di tutti i coefficienti di un'incognita, eccettuato quello, che ha la stessa incognita nell'equazione, che si moltiplica attualmente. Si sottragga quindi un' equazione dall' altra finchè si abbiano $n-1$ residui, vale a dire $n-1$ equazioni senza un'incognita. Si ripeta l'operazione stessa, e si arriverà ad una sola equazione affetta da una sola incognita.

1042. *Scol.* L'eliminazione dell' incognite dall' equazioni lineari si può eseguire con due altri Metodi, e sono

Met. 1.° Si prenda il valore di una medesima incognita da ciascuna dell'equazioni date, riguardando come cognito tutto il resto, e quindi si formino per mezzo di queste n espressioni diverse, $n-1$ equazioni. Siccome queste risultano affette da un' incognita di meno, così ripetendo l'operazione si ottiene un numero di equazioni minore di un'unità, e con un'incognita di meno; e questo succede finchè si arrivi ad un'equazione con una sola incognita.

Met. 2.° Si prenda il valore di un'incognita da una delle n equazioni date, e questo si sostituisca nell'altre equazioni: si avranno così $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, e ripetendo l'operazione si giungerà ad un'equazione con un' incognita sola.

1043. *Scol.* 2. Avendo dedotta un'equazione con una sola incognita, si ha di essa il valore per mezzo dell'Analisi. Affinchè si possa egualmente ottenere il valore delle altre, non si ha che da sostituire il valore dell'incognita, trovata per mezzo dell'ultima equazione, nelle due equazioni precedenti-

denti a due incognite, e trovato così per mezzo dell'analisi il valore di una seconda incognita, sostituire i valori di tali incognite nelle tre precedenti equazioni a tre incognite, e così in seguito: questo vale generalmente, qualunque sia l'ordine dell'equazioni proposte.

Di tutto questo ne daremo degli esempj, dove tratteremo della soluzione dell'equazioni.

1044. *Probl.* 2. Date due equazioni di secondo grado a due incognite $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$, dedurne un'equazione con un'incognita sola.

Soluzione. Si moltiplichi la prima per a', e la seconda per a, e fatta la sottrazione, si avrá un'equazione in cui la x non avrà potenza maggiore della prima, e sarà per esempio (1)..$(a'b-ab')x+a'c-ac'=0$ Ottenuta questa si moltiplichi la prima equazione per $a'x+b'$, e la seconda per $ax+b$: si sottragga una dall'altra, e si avrà ..... (2)....$(a'c-ac')x+b'c-bc'=0$, altra equazione lineare in x. Da questa si prenda il valor di x, e si ponga nell'equazione (1), e ne proverrà l'equazione richiesta $(a'c-ac')^2-(a'b-ab')(b'c-bc')=0$.

In altra maniera. L'equazioni date si riducano alla forma $x^2+ax+b=0$, $x^2+a'x+b'=0$. Dalla seconda si tolga la prima, e si avrà $(a'-a)x+b'-b=0$, e perciò $x+\frac{b-b'}{a'-a}=0$; si ponga $\frac{b-b'}{a-a'}=m$, e si moltiplichi l'equazione $x+m=0$ per x, e la risultante $x^2+mx=0$ si sottragga dalla prima. Ne proviene $(a-m)x+b=0$, o sia $x+\frac{b}{a-m}=0$. Questa si sottragga dall'equazione $x+m=0$, e si avrà finalmen-

te $m - \frac{b}{a-m} = 0$, equazione richiesta, che restituito il valore di m diviene della forma .....

$$\frac{b-b'}{a-a'} - \frac{b}{a - \left(\frac{b-b'}{a-a'}\right)} = \frac{b-b'}{a-a'} - \frac{b(a-a')}{a'-aa'-b+b'} \ldots$$

$(b-b')(a'-aa'-b+b')-b(a-a')^2=0$, formola generale priva dell' incognita x, di cui si può far uso nella prática.

1045. *Probl.* 3. Date due equazioni di terzo grado a due incognite $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$, dedurne un'equazione con un'incognita sola.

Soluzione. Dalla prima equazione moltiplicata per a' si sottragga la seconda moltiplicata per a, e si avrá (1), $(a'b-ab')x^2+(a'c-ac')x+a'd-ad'=0$

In appresso si moltiplichi la prima per $a'x+b'$, e dal prodotto si sottragga la seconda moltiplicata per $ax+b$, e si avrà ...(2). .....
$(a'c-ac')x^2+(a'd-ad'+b'c-bc')x+b'd-bd'=0$

Finalmente dalla prima moltiplicata per .....
$a'x^2+b'x+c'$ si sottragga la seconda moltiplicata per ax^2+bx+c, e ne verrá .... (3) .....
$(a'd-ad')x^2+(b'd-bd')x+c'd-cd'=0$.

Per mezzo dell'equazioni (1), (2), (3) si elimini x^2, ed x come segue, $x^2=\frac{(a'c-ac')}{a'b-ab'}x+\frac{a'd-ad'}{a'b-ab'}$
$=\frac{(b'd-bd')}{a'd-ad'}x+\frac{c'd-cd'}{a'd-ad'}$. Di qui si deduce $x=\frac{(a'd-ad')^2-(a'b-ab')(c'd-cd')}{(a'b-ab')(b'd-bd')-(a'c-ac')(a'd-ad')}$, ed $x^2=$

$a'c-$

$$\frac{(a'c-ac')(c'd-cd')-(a'd-ad')(b'd-bd')}{(a'b-ab')(b'd-bd')-(a'c-ac')(a'd-ad')}.$$

Questi valori sostituiti nell'equazione (2) ci danno l'equazione .....

$$\frac{(a'c-ac')^2(c'd-cd')-(a'c-ac')(a'd-ad')(b'd-bd')}{(a'd-ad')^2(a'd-ad'+b'c-bc')}$$

$$+\frac{(a'b-ab')(b'd-b'd)-(a'c-ac')(a'd-ad')}{(a'b-ab')(c'd-cd')(a'd-ad'+b'c-bc')}$$

$$+\frac{(a'b-ab')(b'd-bd')-(a'c-ac')(a'd-ad')}{}+b'd-bd'=0$$

.....(K). Sia adesso.

1046. *Probl.* Dato un numero n di equazioni affette da n incognite, e di un ordine qualunque, dedurre un'equazione finale affetta da una sola incognita.

Soluzione. Si scelgano due qualunque delle proposte equazioni, e si riguardino come affette da due sole incognite. Da due di queste col metodo adoperato nei Problemi 1.°, 2.°, e 3.°, e che si è veduto per induzione esser generale, si deduca un' equazione che contenga una sola di tali incognite. Si scelgano in simil guisa dell'altre coppie di equazioni fino al numero di $n-1$, ed osservando di riguardarle tutte come composte delle due medesime incognite, si proceda ad eliminare al solito la stessa incognita, che si eliminò dalla prima coppia. E'manifesto che si debbon ottenere in questa guisa $n-1$ equazioni dotate di $n-1$ incognite. Si prosegua ad operare su'queste nel modo stesso, con cui si operò sulle prime, e ripetendo l'operazione $(n-1)$ volte, si giungerà finalmente ad un' equazione finale dotata di una sola incognita. E facile a vedersi, che se in qualchedun dell'equazio-

zioni date mancasse una, o più incognite, ciò non impedirebbe punto la soluzione divisata.

1047. Una sola difficoltà si può presentare nell' uso di questo Metodo, ed è, che una dell'equazioni date, sia, per rapporto ad una dell'incognite, di un grado più elevato dell' altra. Si debba per esempio, eliminar x dalle due equazioni $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$,

Dalla seconda si deduca $x^3=-\frac{b'x^2+c'x+d'}{a'}$.

Si moltiplichi ciascun membro per x, e si avrà $x^4=-\frac{(b'x^3+c'x^2+d'x)}{a'}$; questo valore si sostituisca nella prima, ed essa diverrà del grado della seconda, cioè

$(ab'-a'b)x^3+(ac'-a'c)x^2+(ad'-a'd)x-a'e'=0$.

1048. Con questo rimane esposto completamente un Metodo assai elegante per eliminar le incognite da qualunque numero di equazioni. Si conosce però facilmente, che esso benchè generale, ha due difetti notabili, e sono 1.° che esso procede per induzione. 2.° che non somministra veruna formola generale. E'per questo che passiamo ad esporne un'altro il quale sia diretto, e somministri delle formole generali.

Metodo II. Siccome (*n.* 1046.) l'eliminazione di $n-1$ incognite da un numero n di equazioni, si riduce all'eliminazione successiva di un' incognita da due equazioni a due incognite, proponiamoci di eliminare un'incognita da una di due equazioni date, che sieno di un ordine qualunque.

I. Sieno date l'equazioni $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}$ &c. $+K=0$.....(*A*); $x^n+p'x^{n-1}+q'x^{n-2}+$ &c. $+K'=0$.(*B*)

Si

Si sa, che riguardando x nell'equazione (A) come la sola incognita, essa dee avere m valori espressi per y, e costanti; e si sa inoltre che l'equazioni (A), (B) debbon aver luogo nel tempo stesso, perchè si suppongono appartenenti al medesimo problema; dunque si può inferire primieramente, che dicendo a, b, c, d &c. i valori di x nell'equazione (A) una almeno dell'equazioni .....

$$(K) \begin{cases} a^n + p'a^{n-1} + q'a^{n-2} \text{ &c.} = 0 \\ b^n + p'b^{n-1} + q'b^{n-2} \text{ &c.} = 0 \\ c^n + p'c^{n-1} + q'c^{n-2} \text{ &c.} = 0 \end{cases}$$

debb'aver luogo. Riflettendo poi si vede, che non si ha ragione alcuna di credere una piuttosto, che un'altra di tali radici, capace di soddisfare all'intento; perciò convien cercare un'equazione la quale comprenda tutte l'equazioni (K), e che non possa sussistere, senza che una dell'equazioni (K) sussista: essa per conseguenza dev'esser eguale al prodotto di tutte l'equazioni (K) insieme. Trovata una tal'equazione, si ha l'equazione eliminata che si cercava. Il metodo con cui si dee procedere per trovarla è il seguente.

II. Nell'equazione (A) si ponga per x, $\frac{1}{x}$; e l'equazione (B) si divida per la più gran potenza di x, onde si riducano alla forma

$$1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 \text{ &c.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (Y);$$

$$1 + \frac{p'}{x} + \frac{q'}{x^2} + \frac{r'}{x^3} \text{ &c.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (Z).$$

Si avrà con questo (ved. $n.$ 1038) $1 + px + qx^2 + rx^3$ &c. $= (1 - ax)(1 - bx)(1 - cx)$ &c., onde sia $log.(1 + px + qx^2$ &c.$) = log.(1 - ax) + log.(1 - bx) + log.(1 - cx)$ &c., e sciogliendo in serie i lo-

garimmi ne proviene .....

$$\left.\begin{array}{l} x(p+qx+rx^2\&c.) \\ -\frac{x^2}{2}(p+qx+rx^2\&c.)^2 \\ +\frac{x^3}{3}(p+qx+rx^2\&c.)^3 \\ \&c. \quad \&c. \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} -x(a+b+c+d\&c.) \\ -\frac{x^2}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2\&c) \\ -\frac{x^3}{3}(a^3+b^3+c^3+d^3\&c.) \\ \&c. \quad \&c. \end{array}\right)$$

Suppongasi $(p+qx+rx^2\ \&c.)^2 = A^I + B^I x + C^I x^2 \&c.$

$(p+qx+rx^2\ \&c.)^3 = A^{II} + B^{II} x + C^{II} x \&c.$

&c. &c. = &c. &c.

I coefficienti A^I, B^I, C^I &c. A^{II}, B^{II}, C^{II} &c. &c. essendo facili a trovarsi, o per mezzo della formazione delle potenze, o per altri metodi che abbiamo esposti. Sostituiscansi questi valori, e si faccia per maggior semplicità

$a+b+c+d\ \&c. = -P$,

$a^2+b^2+c^2+d^2\ \&c. = -2Q$

$a^3+b^3+c^3+d^3\ \&c. = -3R$

&c. = &c. e si avrà

$$px+(q-\frac{A^I}{2})x^2+(r-\frac{B^I}{2}+\frac{A^{II}}{3})x^3+(s-\frac{C^I}{2}+\frac{B^{II}}{3}-\frac{A^{III}}{4})x^4\ \&c. = Px+Qx^2+Rx^3+Sx^4\ \&c.$$

di dove, a motivo che i due membri debbon esser identici, si raccoglie $P=p$, $Q=q-\frac{A^I}{3}$, $R=r-\frac{B^I}{2}+\frac{A^{II}}{3}$, $S=s-\frac{C^I}{2}+\frac{B^{II}}{3}-\frac{A^{III}}{4}$ &c. Ciò posto, l'equazioni (*K*) sono in questo caso ..... $1+p^I a+q^I a^2+r^I a^3\ \&c. = 0$, $1+p^I b+q^I b^2+r^I b^3 \&c. = 0$ &c. Il loro prodotto dicasi *M*, onde si abbia

M=

$M = (1 + p'a + q'a^2$ &c.$)(1 + p'b + q'b^2$ &c.$)(1 + p'c + q'c^2$ &c.$)$ &c.

Tutta la difficoltà si riduce a trovar M senza conoscer le radici a, b, c &c.

III. A quest'effetto si prendano i logarimmi, e si avrà $log.\ M = log.\ (1 + p'a + q'a^2$ &c.$) + log.(1 + p'b + q'b^2$ &c.$) + log.(1 + p'c +$ &c.$)$ &c. &c. ma $log.(1 + p'a + q'a^2$ &c.$) = a\,(p' + q'a + r'a^2$ &c.$) - \frac{a^2}{2}(p' + q'a + r'a^2$ &c.$)^2 + \frac{a^3}{3}(p' + q'a + r'a^2$ &c.$)^3$ — &c. &c. Dunque se si suppone che a', b', c' &c. a'', b'', c'' &c, &c. sieno funzioni di p', q', r' &c. come le quantità A'', B', C' &c. A'', B'', C'' &c. &c. lo sono di p, q, r &c. si avrà

$$log.(1 + p'a + q'a^2 \text{ &c.}) = a\,(p' + q'a + r'a^2 \text{ &c.}) - \frac{a^2}{2}(a' + b'a + c'a^2 \text{ &c.}) + \frac{a^3}{3}(a'' + b''a + c''a^2 \text{ &c.}) \text{ &c.}$$

e facendo per abbreviare $\alpha = p'$, $\beta = q' - \frac{a'}{2}$; $\gamma = r' - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3}$; $\delta = s' - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4}$, &c. &c. si avrà $log.(1 + p'a + q'a^2$ &c.$) = \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 + \delta a^4$ &c.

Nel modo stesso si troverà

$log.(1 + p'b + q'b^2$ &c.$) = b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \delta b^4$ &c. &c.

$log.(1 + p'c + q'c^2$ &c.$) = \alpha c + \beta c^2 + \gamma c^3 + \delta c^4$ &c.

Si faccia la somma di tutti questi logarimmi, e si pongano per $a + b + c$ &c., $a^2 + b^2 + c^2$ &c., $a^3 + b^3 + c^3$ &c. le quantità $-\mathcal{P}$, $-2\mathcal{Q}$, $-3\mathcal{R}$ &c.

Si

[illegible] &c. Sia
[illegible] &c., e sa-
[illegible] la base.

[illegible] si ottiene
[illegible] il problema
[illegible]

[illegible] come si possa determinare
[illegible] formar l'equazione
[illegible] prodotto di
[illegible] q^1b^2 &c.
[illegible] prodotto non
[illegible] coefficienti, che
[illegible] perciò i ter-
[illegible] terminare,
[illegible] cominciano a
[illegible]

[illegible] vece di x nell'
[illegible]
[illegible] &c. $=0$,
[illegible] Y) e (Z)
[illegible] &c. in
[illegible] che se fac-
[illegible] medesimi ragio-
[illegible] (Y), e
[illegible] che sia
[illegible] questa sola
[illegible] luogo di
[illegible] si proverà
egual-

egualmente per riguardo a quest' equazione, che i coefficienti p', q', r' &c. non possono formare insieme un prodotto, che superi la potenza n. Ora cangiando p, q, r &c. in p', q', r' &c. non si fa che mutare P, Q, R &c. in α, β, γ &c. e viceversa come si vede dall'espressioni di tali quantità. Dunque poichè sia ha $\varpi = \alpha P + 2\beta Q + 3\gamma R + 4\delta S$ &c. ne segue, che l' equazion finale di cui si tratta, debba esser esattamente la medesima, che l'equazione $M = 0$, e perciò si può concludere, che detta equazione $M = 0$, non dee contenere alcun termine nel quale le quantità p', q', r' &c. formino dei prodotti di una dimenzione $> n$.

V. Ecco pertanto a che si riduce l' esposto Metodo di eliminare un' incognita da due equazioni date, delle quali una sia del grado m, e l'altra del grado n, Si riducano l' equazioni alla forma dell' equazioni (Y), (Z); quindi si passi a determinar le funzioni A', B', C' &c A'', B'', C'' &c. come pure le funzioni a', b', c' &c. a''. b'', c'' &c; queste si sostituiscano nell' espressione di ϖ che si ha come segue.

$$\varpi = pp' + 2\left(q - \frac{A'}{2}\right)\left(q' - \frac{a'}{2}\right) + 3\left(r - \frac{B}{2} + \frac{A''}{3}\right)\left(r'' - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3}\right) + 4\left(s - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)\left(s'' - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4}\right) +$$

&c. &c.

Si formi quindi l' equazione $1 - \phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{2.3}$ &c. avvertendo di rigettare tutti i termini, nei quali

p, q, r &c. p', q', r' &c. formano dei prodotti, che superano il grado dell' altra equazione; e si avrà in questa guisa l'equazione, che risulta dall' eliminazione dell' incognita x.

VI. Prima di lasciar però questo metodo, merita particolare osservazione un compendio di cui si può far uso con vantaggio nella pratica. Esso consiste nel determinare immediatamente le funzioni P, Q, R &c. α, β, γ &c. senza calcolar le funzioni A', B', C', &c. A'', B'', C'' &c. per così ottenere con maggior prontezza l' espressione di π dall' equazione $\pi = \alpha P + 2\beta Q + 3\gamma R + 4\delta S$ &c. A quest' effetto, siccome si ha..(n. II.)..... $\log.(1+px+qx^2 \text{ \&c.}) = Px + Qx^2 + Rx^3$ &c. differenziando per rapporto ad x, si dedurrà..... $\frac{p+2qx+3rx^2 \text{ \&c.}}{1+px+qx^2 \text{ \&c.}} = P + 2Qx + 3Rx^2$ &c. Si moltiplichi in croce, e si faccia il paragone dei termini, e si avrà $P = p$, $2Q + pP = 2q$; ..... $3R + 2pQ + qP = 3r$; $4S + 3pR + 2qQ + rP = 4s$ &c. di dove si deduce $P = p$, $Q = \frac{2q - p.P}{2}$ .....

$$R = \frac{3r - 2pQ - qP}{3}; \quad S = \frac{4S - 3pR - 2qQ - rP \text{ \&c. \&c.}}{4}$$

Avendo così determinate le funzioni P, Q, R &c. per p, q, r &c. si cangeranno quest' ultime in p', q', r' &c., e si avranno i valori delle funzioni α, β, γ, &c. Esempio. Si debba eliminar x dalle due equazioni $1+px+qx^2 = 0$, $1 + \frac{p'}{x} + \frac{q'}{x^2} = 0$. Facendo il quadrato di $p+qx$, si trova, $A' = p^2$, $B' = 2pq$, e $c' = q^2$, e nel modo stesso si trova

$a' =$

$a^1 = p^{12}$, $b^1 = 2p^1q^1$, $c^1 = q^{12}$; dunque.....

$\pi = pp^1 + (2q - p^2)\left(q^1 - \frac{p^{12}}{2}\right) + 3pqp^1q^1 = ...$
$+ q^2q^{12}$

$pp^1 + 2qq^1 - p^{12}q^1 - qp^{12} + \frac{p^2p^{12}}{2}$. Quindi trascuran-
$+ 3pqp^1q^1 + q^2q^{12}$

do i termini nei quali p, q; p^1, e q^1 formano dei prodotti più elevati della seconda dimensione si ha $\pi^2 = p^2p^{12} + 4pqp^1q^1 + 4q^2q^{12}$; $\pi^3 = 0$. $\pi^4 = 0$ &c. Sostituendo questi valori si ha l'equazione richiesta

$$1 - \pi + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{2.3} \text{ \&c. } = 0 = 1 - pp^1 - 3qq^1 + p^2q^1 + p^{12}q$$
$$+ q^2q^{12} - pqp^1q^1$$

1049. *Teor.* Proposte due equazioni, delle quali l'una sia del grado m, e l'altra del grado n, supposto per esempio che sia $n > m$, l'equazione risultante dall'eliminazione, non può esser di un grado $< n$, nè $> nm$.

Dimostrazione. Qualunque sia il metodo, col quale si perviene all'equazione eliminata, è fuor di dubbio (Met. II.) che esso dee supporre almeno implicitamente, che sussista una dell'equazioni (K); ma non v'è ragione possibile, onde preferirne una piuttosto, che un'altra; dunque il Metodo qualunque sia, dee supporre implicitamente che tutte sussistano; perciò l'equazione finale dee risultare, o della forma $M = 0$ precisamente, o risultando di forma diversa, dev'essere di un grado più elevato, e contenere dentro di se l'equazione $M = 0$. Ora questo sarebbe un difetto del metodo, perchè si è veduto (Met. II.) che l'equazio-

zione eliminata risulta $M = o$; ne regue dunque che la natura stessa dell' Eliminazione conduca all' equazione $M = o$. In altro modo : l' equazioni (K) non son altro, che tanti risultati parziali dell'Eliminazione di x, e ciascuna di esse somministra per y dei valori, che sodisfanno ad ambedue l' equazioni (A), (B); ma l'equazion eliminata dee somministrare tutti i valori d' y che possono sodisfare all' equazioni (A), (B) ; dúnqu'essa dee comprendere tutte le radici dell' equazioni (K), e perciò dev' esser eguale al prodotto di tutte le suddette equazioni ; dunque la nostra equazione $M = o$ nasce dalla natura stessa dell' Eliminazione. Ciò posto io ragiono in questa maniera .

Nel prodotto dell'equazioni K non vi può aver parte alcun prodotto dei coefficienti p^1, q^1, r^1 &c. il quale formi una dimensione $> m$ (num. IV.). Ma la maggior potenza d' y (supposto che y sia la seconda incognita) che può entrare nei coefficienti suddetti è y^n, anzi questo può solo avvenire nell' omogeneo di comparazione k^1 ; dúnque la massima potenza d' y, che può esser prodotta dalla multiplicazione dell' equazioni (K), è y^{mn}. Coll' istesso raziocinio si vede che la minima potenza d' y che può aver parte nei coefficienti .... p^1, q^1, r^1 &c. è la prima ; perciò si conclude, che la minima potenza, che può risultare nel prodotto dell' equazioni (K) è y^n. Dunqne rimane dimostrata la verità del *Teor.* proposto, relativamente ad ambedue le parti. E' questo un Teorema che dicesi dimostrato da Mac-Laurin ; ma la dimostrazione non fu da esso pubblicata : M. Cramer ne diede il primo dopo Mac-Laurin una dimostrazione induttiva, e complicata eccessivamente.

AC-

CAPITOLO III.

Della Trasformazione dell' equazioni.

1050. Avendo ridotto un problema mediante l'Eliminazione, a non dipender più che dalla soluzione di un numero determinato di equazioni ad un'incognita sola, conviene alle volte proceder più oltre, e ridurre l'equazioni trovate ad un'altra forma; e questo avviene ogni volta, che non sieno esse sotto la propria forma, suscettibili dei Metodi dell'Analisi.

1051. Trasformare un'equazione, significa mutarla in un'altra, di cui le radici abbiano un determinato rapporto a quelle, dell'equazione proposta. Questa specie di operazione è di un uso molto esteso in tutta l'Analisi.

1062. *Probl.* Accrescere, o diminuire di una data quantità le radici di un' equazione qualunque.

Soluzione. Sia l'equazione generale ..... $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}$ &c. $+u=0$. Facciasi $x+a=y$, o sia $x=y-a$ essendo a positiva, o negativa, secondo che le radici voglionsi accrescere ò diminuire: effettuata la sostituzione si avrà

$$y^m+my^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}y^{m-3}a^3\text{ &c.}$$
$$+py^{m-1}+(m-1)py^{m-2}a+\frac{(m-1)(m-2)}{2}py^{m-3}a^2\text{ &c.}$$
$$+qy^{m-2}+(m-2)qy^{m-3}a\text{ &c.}$$
$$+ry^{m-3}\text{ &c.}$$

Se diasi ad m un qualunque valore determinato, si vedrà che l'ultimo termine non è altro, che l'equa-

l'equazione proposta, in cui a stà in luogo di x. Che il coefficiente del termine che segue, non è altro che lo stesso ultimo termine, di cui ciascun termine sia moltiplicato per il suo esponente, e sia diviso per a. Che il coefficiente del termine appresso, eguaglia il termine precedente, di cui ciascun termine sia moltiplicato per il suo esponente, e sia diviso per $2a$, e così in seguito, cosicchè l'ultimo coefficiente, cioè il coefficiente di y^m, risulta eguale al coefficiente del termine che lo precede, di cui ciascun termine sia moltiplicato per il suo esponente, e sia diviso per ma.

1053. Affinchè si concepisca meglio il fin qui detto, espongo la trasformata suddetta con ordine inverso

$$a^m + ma^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 + \&c.$$

$$pa^{m-1} + (m-1)pa^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{2}pa^{m-3}y^2 \&c.$$

$$qa^{m-2} + (m-2)qa^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{2}qa^{m-4}y^2 \&c.$$

$$ra^{m-3} + (m-3)ra^{m-4}y + \frac{(m-3)(m-4)}{2}ra^{m-5}y^2 \&c.$$

$$\&c.$$

1054. Di qui si vede, che il coefficiente di una qualunque potenza dell' incognita y^t si deduce dal coefficiente della potenza y^{t-1}, con moltiplicare ciascun suo termine per il suo esponente, e con dividerlo per ta.

1055. Di qui si deduce ancora un Metodo molto espedito per trasformare un'equazione in un'altra, che abbia le radici maggiori o minori di una quantità data. Sì

Si debba per esempio trasformar l'equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$ in un'altra, nella quale sieno le radici $y=x+m$, scrivasi m per x, e si avrà .... m^3+am^2+bm+c, che sarà l'ultimo termine della trasformata; il coefficiente del penultimo termine sarà $\frac{3m^3+2am^2+bm}{m}=3m^2+2am+b$; il coefficiente dell'antepenultimo sarà $\frac{6m^2+2am}{2m}=3m+a$; e il coefficiente del primo $\frac{3m}{3m}=1$.

Si moltiplichi ciascuno di questi coefficienti per l'opportuna potenza di y, e si avrà la risultante

$$\begin{array}{rrrl} y^3+3my^2+3m^2y+m^3 & & & \\ +ay^2 & +2amy & +am^2 & =0 \\ & +by & +bm & \\ & & +c & \end{array}$$

equazione che può servire a trasformare qualunque equazione di 3.° grado: basta sostituirvi solamente i valori di a, b, c, m.

1056. Dalla natura del problema esposto ne segue.

1.° Che mentre si accrescono le radici di un'equazione, le positive divengon maggiori, e minori le negative, e viceversa, quando si diminuiscono.

2.° Che accrescendo le radici di una quantità maggiore della massima radice negativa, tutte le radici divengono positive, e viceversa, se si diminuiscano di una quantità maggiore della massima radice positiva.

3.° Quindi se una trasformata risulti con i segni

tutti alternativi, mentre la principale avesse avuto delle consecuzioni, è segno sicuro, che si sono accresciute le radici della proposta di una quantità maggiore della massima radice negativa, e viceversa, se i segni della trasformata risultino tutti eguali &c.

4.° E se la trasformata risulti di un grado inferiore alla principale, certo è che si sono accresciute le radici di essa di una quantità eguale a tante sue radici negative, ò che si sono diminuite le sue radici di una quantità eguale a tante sue radici positive, quante unità sono di meno nel grado dell'equazione.

Ben si conosce poi, che qualora l'equazione principale non contenga radici eguali, la trasformata non può risultare inferiore alla proposta, che di un sol grado.

1057. *Probl.* Trasformare un' equazione in un' altra, di cui le radici sieno le differenze di quelle della proposta:

Soluz. I. Sia l'equazione generale $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= ..(A)$. Poichè x rappresenta qualunque radice dell' equazione (A), sia x' una qualunque di esse, e si avrà $x'^n + Ax'^{n-1} + Bx'^{n-2}$ &c. $= 0 ..(B)$. Si ponga $x' - x$, cioè la differenza di una radice qualunque, da ciascun' altra, $= u$, e sarà $x' = x + u$: si sostituisca questo valore per x' nell' equazione (B) e si ordini la trasformata, che ne risulta, per rapporto ad u: ne proverrà .....

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \text{ &c.} = X$$

$$nx^{n-1}u - (n-1)Ax^{n-2}u + (n-2)Bx^{n-3}u \text{ &c.} = Yu$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}u^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}Ax^{n-3}u^3 + \text{&c.} = Zu^2$$

&c.

&c. &c. fino al termine u^n: si vede pertanto che la trasformata dee essere della forma ..... $X+Yu+Zu^2+Vu^3+$ &c. $+u^n = 0$: ma $X = 0$... per ipotesi; dunque dividendo per u, la trasformata diviene $Y+Zu+Vu^2+$ &c. $+u^{n-1} = 0$ .. (C) e questa è l' equazione richiesta per la soluzione del problema.

II. Le radici α, β, γ &c. dell'equazione proposta (A) essendo di numero n, danno $u = \alpha-\beta = \alpha-\gamma$ &c. $= \beta-\alpha = \beta-\gamma$ &c. $= \gamma-\beta$ &c. onde si raccoglie, che ciascuna classe di differenze ne presenta un numero $n-1$, e che perciò la somma di tutte è $n(n-1)$; quindi la trasformata esser dee di grado pari, ed $= n(n-1)$. Per ottenere tutte le $n(n-1)$ radici, converrebbe combinare l' equazione (C) coll' equazione (A) per mezzo dell' eliminazione, onde avere un'equazione in u solamente, e del grado $n(n-1)$. Siccome però quest'operazione sarebbe troppo complicata, passiamo a cèrcare un metodo con cui ottener lo stesso per via più semplice.

III. Osservo primieramente che la trasformata dovendo contenere le radici $\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$ &c. $\alpha-\gamma$ $\gamma-\alpha$ &c. dee esser mancante dei termini di sito pari poichè combinando un numero pari di quantità come ..... m, $-m$, n, $-n$, p, $-p$ &c. si trova la somma $= 0$, la somma delle combinazioni a tre, a cinque &c. $= 0$: d' altronde la trasformata suddetta dee esser del grado $n(n-1)$. Dunque se pongasi $n(n-1) = 2m$, l' equazion finale richiesta dee risultare

$u^{2m} - au^{2m-2} + bu^{2m-4} - cu^{2m-6}$ + &c. = .. (D) e ponendo $u^2 = v$, dee divenir finalmente .....

$v^m - av^{m-1} + bv^{m-2} - cv^{m-3}$ + &c. = ... (E)

equazione, di cui le radici essendo i quadrati $(\alpha-\beta)^2$, $(\pi-\gamma)^2$ &c. sono tutte reali, e positive, e di cui la dimensione essendo suddupla di quella dell'equazione (C), dee contener le radici $(\pi-\beta)^2$, $(\pi-\gamma)^2$ &c. ma non le contrarie.... $(\beta-\pi)^2$, $(\gamma-\pi)^2$ &c., ò viceversa. Ed in effetto se l'equazione (E) contenesse per es.° le due radici $(\pi-\beta)^2$, $(\beta-\pi)^2$, l'equazione (D) non conterebbe più due radici eguali di segno diverso $x-\beta$, $\beta-$, ma bensì quattro, perchè sarebbe $u=\pm(\pi-\beta)$, ed $u=\pm(\beta-\pi)$ delle quali... $+(\pi-\beta)$, e $-(\beta-)$ sono eguali, e del medesimo segno, come pure $-(\pi-\beta)$, $+(\beta-\pi)$.. sono ambedue uguali, e di segno negativo.

IV. Se si potessero adesso determinare i coefficienti a, b, c &c. per i coefficienti dati A,B,C &c. si avrebbe senza più l'equazione cercata. Passiamo a questa ricerca.

Il coefficiente a dee contener la somma di tutti i quadrati $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)$ &c. &c. ma si sa che $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2$ &c. .....;.....;.... $=(n-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ &c.$)-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ &c.$)$ $=(n-1)(A^2+2B)-2Bn-1)=(n-1)A^2-2nB$, perchè $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ &c.$=A^2-2B$, ed $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ &c.$=B$. Per ottener l'espressione degli altri coefficienti con maggior facilità, pongasi .....

$P=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ &c.

$Q=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ &c.

$R=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ &c.

$S=$ &c. &c.

Dalle cose dette al (*n.* 1038.) sarà com'è manifesto $P=A$, $Q=A^2-2B$, $R=A^3-3AB+3C$; $S=A^4-4A^2B+4AC-2B^2-4D$; &c.

Pon-

Pongasi oltre di questo

$p=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2$ &c.
$q=(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\ )^4+(\beta-\gamma)^4$ &c.
$r=(\alpha-\beta)^6+(\alpha-\gamma)^6+(\ -\gamma)^6$ &c.
$s=$ &c. &c.

Siccome si vide essere $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2 = (n-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ &c.$) -2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ &c.$)$ si dedurrà $p=(n-1)Q-2B$. Passando a q si vede, che $(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4+(\beta-\gamma)^4$ &c. è = ...
$(n-1)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4$ &c.$)-4(\alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\beta^3\gamma$ &c.$)$
$+6(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ &c.$)-4(\alpha\beta^3+\alpha\gamma^3+\beta\gamma^3$ &c.$)$
$=(n-1)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ &c.$)-$ .....
$4(\alpha\beta^3+\alpha\gamma^3+\beta\gamma^3+\beta\alpha^3+\gamma\alpha^3+\gamma\beta^3$ &c.$)+$ .....
$6(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ &c.$)$ Ma $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ &c. $=S$, ...
$\alpha\beta^3+\alpha\gamma^3+\beta\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma$ &c.$)(\alpha^3+\beta^3+$ &c.$)-$
$(\alpha^4+\ ^4+\gamma^4$ &c.$)=PR-S$. Parimente .....

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 \text{ &c.} = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\ ^2\text{&c.})^2}{2} \text{ .....}$$

$$-\frac{(\alpha^4+\beta^4+\ ^4\text{&c.})}{2} = \frac{Q^2-S}{2}\text{ ; dunque .....}$$

$$q=(n-1)S-4(PR-S)+6\frac{(Q^2-S)}{2}.$$

Proseguendo con lo stesso raziocinio si trova

$$r=(n-1)V-6(PT-V)+15(QS-V)-20\frac{(R^2-V)}{2}$$

cioè si ha $p=nQ-\frac{2P^2}{2}$, perchè $P^2=Q+2B$;

$q=nS-4PR+\frac{6Q^2}{2}$, riducendo l'espressione anteced., $r=nV-6PT+15QS-\frac{20R^2}{2}$ &c., e generalmente $\varphi\mu=nQ^\mu-2\mu P(Q^{\mu-1})+$ .....

$$\frac{2\mu(2\mu-1)}{1\cdot 2}\mathcal{Q}'\mathcal{Q}''^{-1})\,\text{ec.}\pm\frac{2\mu(2\mu-1)..(\mu+1)}{1\quad 2\cdot 3..\mu}\,\frac{(\mathcal{P}^{\mu})^2}{2}$$

μ essendo un segno che esprime il numero ordinale della detta ϕ per rapporto alle antecedenti p, q, r &c. cosicchè ϕ^4 per esempio esprime S, ϕ^5 esprime T, &c. &c.

V. Conosciuti i valori delle quantità p, q, r &c. si conoscono i valori dei coefficienti a, b, c &c. per mezzo delle formole, da cui si sono avuti $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, R &c. che sono

$\mathcal{P}=A$, $\mathcal{Q}=A^2-2B$, $R=A^3-3AB+3C$; $S=$ &c. e non si ha da far altro, che metter p, q, r &c. in luogo di $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, R &c. ed a, b, c &c. in luogo di A, B, C &c. Si ha infatti $a=p$; $b=\frac{a^2-q}{2}$; $c=\frac{r-a^3+3ab}{3}$; $d=$ &c. &c.

VI. Si può qui osservare, che l'equazione (D) rimane la stessa, ancorchè le radici tutte dell' equazione (A), o (B) si accrescano, o si diminuiscano di una medesima quantità; perchè $(\alpha\pm\lambda)-(\beta\pm\lambda)=\alpha-\beta$ &c. &c.

Quindi se l' equazione proposta non sia priva del secondo termine, si può esso eliminare, perciò che diremo, e dedurre in seguito l'equazione (D), della quale si troveranno i coefficienti con maggior facilità; perchè divenendo $A=0$ e perciò $P=0$, le formole addotte divengono

$\mathcal{P}=0$

$P=0$ $\quad p=m\mathfrak{Q}$ $\quad a=p$

$\mathfrak{Q}=-2B$ $\quad q=mS+6\frac{(\mathfrak{Q}^2)}{2}$ $\quad b=\frac{a^2-q}{2}$

$R=3C$ $\quad r=mV+15\mathfrak{Q}S-20\frac{R^2}{2}$ $\quad c=\frac{3ab-a^3+r}{3}$

$S=-B\mathfrak{Q}-4D$ &c. &c. $\quad$ &c, = &c.

1058. *Scol.* Se i segni dell'equazione (E) fossero tutti i medesimi, siccome le sue radici sonoi quadrati delle differenze $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$ &c. ciò sarebbe un segno sicuro, che le radici dell'equazione (D) sieno tutte immaginarie (Ved. *n.* 1037. *Met. II.*)

1059. *Probl.* Moltiplicare, e dividere le radici di un' equazione per una data quantità.

Soluzione. Sia l'equazione $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}$ &c. $=0$, e le sue radici si debbano moltiplicar per q. Pongasi $qx=y$ o sia $x=\frac{y}{q}$, e fatta la sostituzione si avrà $\frac{y^n}{q^n}+\frac{ay^{n-1}}{q^{n-1}}+\frac{by^{n-2}}{q^{n-n}}$ &c. $=0=y^n+aqy^{n-1}+bq^ny^{n-1}$ &c. equazione richiesta. Volendo divider le radici per q, si ponga $q=\frac{1}{r}$, e si avrà la trasformata $y^n+\frac{a}{r}y^{n-1}+\frac{b}{r^2}y^{n-2}+\frac{c}{r^3}y^{n-3}$ &c. $=0$.

Di qui si deduce il Teorema che segue

1060. *Teor*. Se si moltiplichi, o si divida ordinatamente ciascun termine di un'equazione, per una serie qualunque 1, m, m^2, m^3 .... m^n, le radici della risultante equivalgono a quelle della proposta moltiplicate, o divise per m.

1061. *Scol.* E'chiaro che dopo la trasformazione divisata, per ottener le radici dell'equazione proposta, convien trovar quelle dell'equazione trasformata, e dividere, ò moltiplicare ciascuna di esse per il secondo termine m della serie, per cui furono moltiplicate ò divise nella trasformazione le radici della proposta.

1062. Molti sono gli usi delle trasformazioni, che si ottengono mediante il Probl. precedente. Servon' esse:

1.° Per liberare un'equazione dai radicali, qualora sien' omogenei, e situati alternativamente. Così l'equazione $x^2+2\sqrt{a}\,x^2-15x+9\sqrt{a}=0$..(A) si riduce all'equazione (B) nella quale $y=x\sqrt{a}$

1	$\sqrt{a}$	a	$a\sqrt{a}$	...

$y^3+2ay^2-15ay+9a^2=0$..(B)

2.° Per cangiare un'equazione in un' altra, in cui il coefficiente di un determinato termine sia minore, o maggiore di quello, che avevasi nella proposta. Sia l'equazione $x^3-40x^2+48x-100=0$, e si voglia cangiare in un'altra, nella quale il coefficiente del secondo termine sia <40.

Si divida ordinatamente l'equazione data per la serie 1, 4, 16, 64, e si avrà l' equazione richiesta (C), nella quale $y=\frac{x}{4}$

$x^3-40x^2+48-100=0$
1, 4, 16, 64
$y^3-10y^2+3y-\frac{25}{16}=0$ .. (C)

3.° Per liberare il primo termine di un' equazione dal coefficiente, il che è sempre necessario, sen-

senza introdur frazioni nei suoi termini, sia l'equazione $7x^3-2x^2-5x+3=0$;

1, 7, 49, 343

$7y^3-14y^2-245y+1029=0$ .. (*D*)

Moltiplicandola per la serie 1, 7, 49, 343 &c. si ha l'equazione cercata (*D*), che essendo divisa per 7 si riduce ad $y^3-2y^2-35y+147=0$.

4.° Se venga data un' equazione, in cui vi sieno dei coefficienti decimali, si può trasformare in un' altra in cui i coefficienti sien numeri interi. Per ottener questo, basta moltiplicar l' incognita per l' unità, seguita da un' opportuno numero di zeri. Sia l' equazione ..... $x^3+5,745x^2+6,7847x+9.7428=0$ si ponga $x=\frac{y}{1000}$, e fatta la sostituzione si avrà ..... $y^3+5745y^2+6784700y+9742800000=0$.

5.° Avendosi un' equazione, in cui vi sieno de' termini fratti, si posson toglier le frazioni, con moltiplicare ordinatamente l' equazione per una serie, che abbia per secondo termine il prodotto di tutti i denominatori, ovvero un loro divisor comune. Ecco un esempio .....

$$x^3-\frac{px^2}{a}+\frac{qx}{b}-\frac{r}{c}=0$$

1, abc, $a^2b^2c^2$, $a^3b^3c^3$

$y^3-bcpy^2+a^2bc^2qy+a^3b^3c^2r=0$, dove $y=abcx$. Se si abbiano dei termini interi si riguarderanno come divisi per l' unità.

Alle volte però giova prender per secondo termine della

della serie un divisor comune a ciascun denominatore. Esempio : $x^3+\ast+\frac{2}{3}x-\frac{81}{27}=0$

1 , . 3 , 9 , 27

$y^3+6y-81=9$

In questa maniera si ottiene una trasformata più semplice . Di qui si può dedurre un altro metodo per liberare dal coefficiente il primo termine di un' equazione, e questo consiste nel dividere per esso tutta l'equazione , e toglier poi le frazioni come sopra.

1063. *Probl.* Data un' equazione affetta in qualunque maniera da radicali , trasformarla in un' altra i di cui termini sieno razionali.

Soluz. Un' equazione in cui abbiano parte dei radicali , si può liberare dall'irrazionalità con la formazione delle opportune potenze, come avemm' occasione di vederne qualche esempio. Questo metodo però non riesce che in soli quattro casi, e sono 1.° Che l'equazione sia composta di due soli termini radicali , senza verun altro termine, come $a\sqrt[n]{x}\pm b\sqrt[m]{y}=0$. 2.° Che contenga due termini radicali, insieme con dei termini razionali, ma uno dei radicali sia quadratico . 3.° Che abbia tre termini radicali quadratici , con qualunque numero di termini razionali ; 4.° Finalmente , che sia composta di quattro termini radicali quadratici , senza verun altro termine. Passiamo pertanto ad esporre un metodo generale , di cui si possa far uso in qualunque caso .

Metodo. Ciascuno dei termini irrazionali , trascurato il coefficiente , si ponga eguale ad una quan-

quantità indeterminata. Si avranno così tant'equazioni, quanti sono i radicali; si sostituiscano le indeterminate nell'equazione data, che in questa guisa prenderà una forma razionale; e per mezzo di essa, e dell'equazioni ipotetiche si proceda all'eliminazione dell'indeterminate, finchè si giunga ad ottenere un'equazione finale priva di esse. Si avrà così un'equazione equivalente alla proposta, e priva d'irrazionalità. Il tutto si renderà più chiaro con un esempio.

Sia proposta l'equazione $\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt{x^3}+b$. Si faccia $\sqrt{x}=p$, $\sqrt[3]{y^2}=q$, e $\sqrt{x^3}=r$. Fatte le sostituzioni la proposta diviene $p+q=r+b$. Dall'equazione $\sqrt{x}=p$ si ha $x=p^2$, e dalla proposta trasformata, $p^2=(r+b-q)^2=r^2+b^2+3rb-2rq-2bq+q^2=x$, equazione priva di p. In questa si sostituisca per r^2 il suo valore $=x^3$, e si avrà ..... $x^3-2rq+2rp-2bq+b^2+q^2=x$; Di qui poi si deduce $r=\frac{x-x^3+2bq-b^2-q^2}{2b-2q}$, e quadrando ..... $r^2=\left(\frac{x-x^3-2bq-b^2-q^2}{2b-2q}\right)^2=x^3$ equazione, priva di p e di r. Si ponga $x-x^3-b^2=M$, e sarà $\left(\frac{M-2bq-q^2}{2b-2q}\right)^2=x^3$ o sia ..... $\frac{M^2-4Mbq+4b^2q^2-2Mq^2+4bq^3+q^4}{4b^2-8bq+4q^2}=x^3$, in questa si sostituisca per q^2 il suo valore y^2, preso dall'equazione $\sqrt[3]{y^2}=q$, e si avrà .....

$$\frac{M^2-4Mbq+4b^2q^2-2Mq^2+4by^2+qy^2}{4b^2-8bq+4q^2}=x^3 \ldots (K)$$

Di qui si deduca il valore di q^2, e sarà

$$q^2=\frac{M^2-4Mbq+4by^2+qy^2-4b^2x^3+8bqx^3}{4x^3-4b^2+2M} \ldots (A)$$

Si moltiplichi per q ciascun membro, e sarà

$$q^3=y^2=\frac{M^2q-4Mbq^2+4bqy^2+q^2y^2-4b^2qx^3+8bq^2x^3}{4x^3-4b^2+2M}$$

Di qui si deduca q^2, e si avrà

$$q^2=\frac{4x^3y^2-4b^2y^2+2Mx^2-M^2q-4bqy^2+4b^2qx^3}{y^2-4bM-8bx^3}$$

Questo valore di q^2 si paragoni col valore (A), onde si abbia

$$\frac{4x^3y^2-4b^2x^2+2My^2-M^2q-4bqy^2+4b^2qx^3}{y^2-4bM-8bx^3}=\frac{M^2-4Mbq+4by^2+qy^2-4b^2x^3+8bqx^3}{4x^3-4b^2+2M}$$

Da quest' equazione si deduca il valor q. Questo si ponga in (A) onde aver q^2, ed ottenuti così q, e q^2, altro non resta che sostituirli in (K), per aver l' equazion finale priva di radicali come si richiedeva.

1064. *Probl.* Trasformare un' equazione in un' altra, di cui le radici moltiplicate per quelle della proposta, sieno eguali ad una quantità data.

Soluz. Si ponga $xy=a$, o sia $x=\frac{a}{y}$, e si avrà l' equazione richiesta. O più brevemente; si muti, x in a, e si moltiplichi l' equazione ordinatamente per la serie $1, y, y^2, y^3$ &c. $\ldots y^n$.

1065. *Probl.* Trasformare un' equazione in un' altra,

tra di cui le radici sieno le reciproche di quelle della proposta.

Soluz. Si faccia $y=\frac{1}{y}$, e la trasfosmata sarà qual si richiede. In effetto si vede che crescendo x, y dee diminuire, e viceversa; dunque le radici y sono reciproche, per rapporto alle radici x. Esempio - Sia l' equazione .....

$$x^3-px^2+qx-r=0$$
$$1,\ y,\ y^2,\ y^3$$

$$1-py+qy^2-ry^3=0 \ldots (2)$$

Per trasformarla in un' altra, di cui le radici sieno reciproche alle radici di essa, si faccia $x=\frac{1}{y}$ o più semplicemente si faccia $x=1$; si moltiplichi ordinatamente per la serie $1, y, y^2, y^3$, e si avrà l' equazione (2), che è qual si cerca.

1066. Avvertendo però alla forma dell' equazione (2), si raccoglie un altro Metodo anche più breve. Si faccia il primo termine dell' equazione data $=1$, e nei termini successivi si ponga per ordine y, y^2, y^3 &c., invece delle potenze di x.

1067. *Probl.* Trasformare un' equazione in un' altra, in cui un determinato coefficiente sia eguale ad una quantità data.

Soluz. La quantità data sia $=m$; e suppongasi che moltiplicando le radici x per una quantità z, da determinarsi in appresso, ne risulti la trasformata che si cerca. Sia dunque $x=\frac{y}{z}$, e sostituito questo valore in luogo di x, nella trasformata che

che ne risulta, si faccia il coefficiente p roposto $= m$. Si avrà un equazione, in cui la sola incognita è z, che perciò si determinerá facilmente. Per vederne un esempio, sia proposta l' equazione ..... $x^3 - px^2 + qx^1 - r = 0$

da trasformarsi co- 1 , z , z^2 , z^3

me si è divisato ——————————

$$y^2 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0 \ldots (R)$$

Si moltiplichi ordinatamente per la serie $1, z, z^2, z^3$, e nella risultante si muti x in y: si avrà con ciò l' equazione (R) che è qual si ricerca. In questa suppongasi che il coefficiente del secondo termine debba essere $= m$; si farà $pz = m$; e si avrà $z = \frac{m}{p}$. Se il coefficiente del 3.° termine sia quello che dev'essere $=$ ad m, si farà $qz^2 = m$, e si avrà $z^2 = \frac{m}{q}$, e perciò $z = \pm \sqrt{\frac{m}{q}}$ e così inseguito per gli altri coefficienti.

1068. *Probl.* Data un equazione, che abbia tutte le radici reali negative, oppure parte negative, e parte positive, trasformarla in un' altra, che abbia tutte le radici positive, e viceversa.

Soluzione. Qualora sieno tutti i termini positivi, si mutino i segni nei siti pari, e sarà sciolto il problema (*n.* 1026). Se questo non abbia luogo, prendasi il massimo coefficiente negativo, non eccettuato l' ultimo termine, che sia per esempio $= -m$; facciasi $x - m + 1 = y$, e fatta la sostituzione si avrà l' equazione richiesta.

Dimostrazione per induzione. Sia l' equazione $x^3 - mx^2 - nx - r = 0$, e sia $-m$ il massimo coefficien-

ficiente negativo. Sostituito $(m+1)-y$ in vece di x, si ha la trasformata .....

$$\left.\begin{array}{l} y^3-3(m+1)y^2+3(m+1)^2y-(m+1)^3 \\ +\quad m\,y^2-2m(m+1)y+m(m+1)^2 \\ -\qquad\quad ny+n(m+1) \end{array}\right\}=0,$$

la quale ha tutti i segni alternativi $+\quad r$

Difatti il primo termine é positivo, e il secondo è manifestamente negativo: il terzo è positivo, perchè se da $3(m+1)(m+1)$ tolgasi ..... $2m(m+1)$ il residuo non può esser minore di $m+1$, e se da $m+1$ tolgasi n che è $<m$, il residuo dev' esser positivo. Per rapporto all' ultimo termine si vede primieramente, che $-\overline{m+1}^3 + m(m+1)^2$ è $= (m+1)^2$: se ode $(m+1)^2$, si aggiunga $n(m+1)$ il residuo non può esser minore di $-(m+1)$, perchè n è $<m$, e se finalmente ad $m+1$ si aggiunga r il residuo sarà pure negativo. Lo stesso raziocinio si applichi all' equazione di qualunque altro grado, e si concluderà generalmente &c. La dimostrazione diretta della soluzione addotta richiede un' indagine, che non può qui aver luogo.

1069. *Scolio* Si sono presi i coefficienti tutti negativi, perchè sono essi soli, che possono mutare l' alternativa dei segni nelle potenze di ..... $(m+1-y)p$.

1070. Dalla natura dell'esposto metodo si deduce facilmente, che per la sostituzione di $m+1-y$ in luogo di x, le radici negative della trasformata divengono positive, e rimangono accresciute della quantità $m+1$; e che le radici positive divengon negative, e rimangon diminuite della quantità $m+1$. Difatto sieno $x-a=0$, $x+b=0$ due fattori sem-

semplici dell'equazinne proposta, ed $m+1$ facciasi $=p$; sostituendo si ha $p-y-a=0$, $p-y+b=0$, e perciò $y=p-a$, $y=p+b$, dove b, che era negativa è divenuta positiva, ed è stata accresciuta di p, ed a che era positiva è divenuta negativa ed è rimasta diminuita di p.

1071. Quindi si vede, che per cangiare un'equazione data in un'altra, che abbia tutte le radici positive, $m+1$ dee esser maggiore di qualunque radice positiva; e per ciò, che si è dimostrato, il massimo coefficiente negativo $-m$ accresciuto di un'unità sodisfa sempre a questa condizione.

1072. Si vede ancora, che una maniera di provar direttamente il metodo esposto sarebbe quella di determinare direttamente una quantità, che superi di poco la massima radice positiva di un' equazione qualunque.

Questo Metodo non si è trovato ancora: si ha soltanto il Metodo che segue, il quale procede per tentativo.

Sia l'equazione, $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}$ &c. $=0$, e pongasi $x-a=y$ o sia $x=y+a$. Se i coefficienti della trasformata saranno tutti positivi, sarà certo, che le di lei radici saranno tutte negative, e che perciò $a>x$, cioè maggiore della massima radice dell' equazione proposta. Ora io vedo che i coefficienti della trasformata, sostituendo x per a nella trasformata, che si ha al (*n.* 1063.) sono i seguenti $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}$ &c. $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+\ldots\ldots$ $(n-1)bx^{n-3}$ &c. $\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ax^{3-}\ldots\ldots$ $+\frac{(n-2)(n-3)}{2}bx^{n-4}$ &c.. Dunque per ottenere la

quan-

quantità, che superi più da presso la massima radice dell'equazione proposta bisogna trovar tentando la minima quantità, che renda le suddette espressioni positive.

1073. *Scolio*. 1.° Facendo $x = \frac{1}{y}$ si troverebbe la più prossima quantità minore della minima radice positiva.

1074. *Scolio* 2.° Mutando i segni di un'equazione nei siti pari, il massimo coefficiente negativo accresciuto di una unità, risulta maggiore della massima radice positiva: ma questa innanzi alla mutazione era negativa; dunque si può in questa maniera, trovare una quantità che sia maggiore della massima radice negativa di un' equazione proposta. Per trovar poi questa quantita con più di esattezza, converrà trovar tentando la minima quantità, che sostituita per x nei coefficienti indeterminati, esposti qui sopra, gli renda, cominciando da quello del secondo termine, alternativamente positivi, e negativi.

1075. Per cangiare un' equazione data in un' altra che abbia tutte le radici negative basterà porre $x = \overline{m+1}+y$, e si proverá come sopra (*n.*1068.) che le radici dovranno esser realmente negative, onde $m+1$ sarà di nuovo maggiore della massima radice positiva, come è facile a vedersi.

1076. *Probl.* Trasformare un' equazione in un' altra, di cui le radici sieno eguali ad una data potenza delle radici dell'equazion proposta.

Soluz. Sia data l'equazione $a+bx+cx^2+dx^3$ &c. $=0$. Si ponga $x^n=z$: dalla trasformata si elimini

x, e si avrà l' equazione richiesta. Siccome però si ha una sola equazione, convien ricorrere a qualche artifizio. Esso è il seguente. L'equazione che proviene dalla sostituzione di z in vece di x^n si riduca alla forma $P+Qx+Rx^2+Sx^3+\ldots\ldots\Gamma x^{n-1}=0$ cosicchè sia P la somma de'termini, nei quali non entra x; Qx la somma di quelli nei quali entra x, e così in seguito. Questa si moltiplichi per x successivamente, tante volte, quante unità si contengono in $n-1$, e si sostituisca sempre per x^n il suo valore z. Ottenuto così un numero n di equazioni, si moltiplichi ciascuna per un' indeterminata diversa. Le somme dei termini omologhi di tali equazioni si facciano eguali a zero separatamente, e per mezzo di tutte quest'equazioni, meno quella senza x, si determini il valore di ciascuna indeterminata; per il che, a motivo, che si ha un'equazione di meno di quelle che si richiederebbero, basta solamente avvertire, di determinare il valor dell' ultime due, che rimangon dopo la successiva eliminazione, secondo ciò che lo dimostra la forma stessa dell'equazione finale. Trovato il valore delle indeterminate, basta sostituirlo nell' equazione senza x, e si ha l'equazione in z come si cercava.

1077. *Probl.* Togliere un termine qualunque da una data equazione.

Soluzione. Sia l'equazione $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}$&c. $=0$. Tutto si riduce a trovare una quantità, che essendo aggiunta, o sottratta da ciascuna sua radice, ne risulti un'altra equazione, che sia priva del termine richiesto. Sia z questa quantità, onde abbiasi $x\pm z=y$, o sia $x=y\mp z$. Fatta la sostituzio-

zione la trasformata sarà .....

$$y^n - nzy^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^2 y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} z^3 y^{n-3} \text{ &c.}$$

$$\pm ay^{n-1} \mp n-1\ azy^{n-2} \pm \frac{(n-1)(n-2)}{2} az^2 y^{n-3} \text{ &c.}$$

$$\pm\ by^{n-2} \mp (n-2)\ bzy^{n-3} \text{ &c.}$$

$$\pm\ cy^{n-3} \text{ &c.}$$

Dovendo svanire un dato termine di quest'equazione, si supponga ciò, come gia verificato, e pongasi il proposto termine $=0$. Dall'equazione risultante si dedurrà per le regole dell'Analisi, il valore, che deve aver z, affinchè questo realmente succeda. Se debbasi per esempio togliere il 2.° termine, pongasi $-nz \pm a = 0$, e si avrà $z = \pm \frac{a}{n}$, d'onde si deduce la regola per togliere il secondo termine da qualunque equazione. Se il secondo termine di un'equazione sia positivo, si accresca l'incognita del coefficiente del secondo termine diviso per l'esponente del primo; e qualora esso sia negativo, si diminuisca della medesima quantità.

Se si debba togliere il terzo termine, facciasi $\frac{n(n-1)}{2} z^2 y^{n-2} \mp (n-1)\ azy^{n-2} \pm by^{n-2} = 0$, e così in seguito, per qualunque altro termine.

1078. *Scol.* 1. Osservando le diverse equazioni che si ottengono per togliere i successivi termini di un'equazione, si raccoglie, che generalmente per togliere il termine *m.*simo, convien riscio-

gliere un'equazione del grado $m+1$. Oltre di questo è facile a vedersi, che per toglier l'ultimo termine, si richiede la soluzione di un'equazione identica alla proposta, e che tolto un termine qualunque di un'equazione, volendo toglierne dopo un altro, si riproduce di nuovo il primo.

1079. *Scol.* 2.° V'è un artifizio per togliere il penultimo termine di un'equazione, per mezzo di un'equazione di 1.° grado, l'antepenultimo per mezzo di un'equazione di 2.° grado &c. Difatto data un' equazione $x^3+px^2+qx+r=0$, e fatto $x=\frac{1}{y}$ si ha $\frac{1}{y^3}+\frac{p}{y^2}+\frac{q}{y}+r=0$, che ridotta diviene $1+py+qy^2+ry^3=0$, o sia $\frac{1}{r}+\frac{p}{r}y+\frac{q}{r}y^2+y^3=0$ ($\mathcal{A}$) Se tolgasi in questa il secondo termine, togliesi quello, che nella proposta era il penultimo, e perciò si puó togliere il penultimo termine con un'equazione di 1.° grado &c.

Si vede realmente, che non si può togliere il secondo termine $\frac{q}{r}y^2$ dell'equazione ($\mathcal{A}$) senza render $q=0$; dunque lo stesso artifizio deve rendere eguale a zero anche qx, ch'è il penultimo termine della proposta.

1080. *Scol.* 3.° Si può togliere il penultimo termine di un'equazione con un' altro artifizio anche più semplice, ed è questo. Si tolga dall'equazione proposta il secondo termine: la trasformata si cangi in un'altra, di cui le radici sieno i quozienti, che nascono dal dividere il suo ultimo termine per le radici della nuova equazione: la risultan-

tante sarà l'equazione richiesta. Sia $x^3 - 6x^2 + 4x + 10 = 0$. Tolto il secondo termine si avrà $z^3 - 8z + 2 = 0$. Pongasi adesso $z = \frac{2}{y}$, e si avrà la trasformata richiesta $y^3 - 8y^2 + 4 = 0$.

1081. *Probl.* Proposta un'equazione, che non superi il 4.° grado, si dimanda un metodo di toglierne tutti i termini meno due, fra i quali si comprenda l'omogeneo.

Soluzione. Per cominciare dall'equazioni di 3.° grado sia l'equazione $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, e si vogliano togliere i due termini mx^2 ed nx; pongasi $x^2 = ax + b + y$, a, b, essendo quantità indeterminate, che si dovranno perciò adattare alle condizioni del problema, ed y essendo una nuova incognita.

Moltiplicando ambedue i membri dell' equazione addotta per x, si avra $x^3 = ax^2 + bx + xy$, e sostituendo il valore di x^2, $x^3 = a^2x + ab + ay + bx + xy$. Si ponga adesso nell'equazione proposta in luogo di x^3 il valore suddetto, ed in luogo di x^2 il valore ipotetico $ax + b + y$, e si avrà un' equazione in cui si troverà la sola prima potenza di x, e che essendo ridotta, sarà della forma: $(b^2 + mb + n + a + y)x + (b + m)(a + y) + p = 0$ (A). Da questa si deduca il valor di x, e si avrà $x = \frac{(b+m)(a+y) - p}{b^2 + mb + n + a + y}$: questo valore si sostituisca nell'equazione ipotetica $x^2 = ax + b + y$, e si avrà la risultante $(y+a)^3 - (mb + m^2 - 2n)(y+a)^2 + nb^2) + (mn - 3p)(b + n^2 - 2mp)(a + y) - p(b^3 + mb^2 + nb + p) = 0$ (B) la quale sviluppando le potenze di $y + a$, e facen-

cendo $3a - mb - m^2 + 2n = A$,
$B = 3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)(b + n^2 - 2mp)$
$C = a^3 - (mb + m^2 - 2n)a^2 + (nb^2 + (mn - 3p)(b + n^2 - 2mp))a$
$- p(b^3 + mb^2 + nb + p)$, si riduce finalmente alla forma $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$.

In questa per fare svanire il secondo, e il terzo termine si ponga $A = 0$, $B = 0$, e per mezzo di queste due equazioni, si determineranno con le regole dell' Analisi, i valori di a, e di b, atti a produrre la divisata distruzione di termini; così l'equazione y sarà ridotta ad $y^3 + C = 0$

Per riguardo all' equazione di 4.° grado, si toglieranno come sopra le due potenze di x maggiori delle altre, cioè la potenza quarta, e la potenza terza, per mezzo di un'equazione ipotetica $x^3 = ax^2 + bx^2 + bx + c + y$.

Dall'equazione derivante dalla sostituzione, in cui x sarà inalzata al quadrato, si dedurrà coi metodi dell'analisi il valore della medesima x; questo si sostituirà nell'equazione ipotetica, e se ne dedurrà l'equazione risultante, ordinata per le dette potenze; in questa si faranno eguali a zero i coefficienti di x^3, di x^2, e di x: da quest' equazioni si dedurranno i valori di a, b, e si avrà l'equazione finale $y^4 + D = 0$.

1082. *Scolio.* Questo metodo che devesi a M. Tschirnaus (Atti di Lipsia an. 1683. p. 204.) non si estende all' equazioni superiori al 4.° grado, per questo motivo principalmente, perchè l'equazioni, che si hanno dal fare i coefficienti A, B, C, D &c. eguali a zero, ascendono successivamente inalzati a dei gradi sempre più elevati e tali, che superano ancora il grado dell' equazione proposta. Si può vedere su quest' oggetto, ciò che hanno scritto

M. Pre-

M. Prestet (Nouveaux Elemens des Mathem. Vol. 2. pag. 413.) e M. de la Grange (Atti dell' Accademia di Berlino 1770.)

1083. *Probl.* Render completa un' equazione in cui machino dei termini .

Soluzione . Poichè quando manca qualche termine in un' equazione , debbon essere le radici positive , eguali alle negative , o il prodotto delle positive nelle negative a due , a tre &c. eguale à quello delle positive nelle positive , e delle negative nelle negative a due , a tre &c. ne segue , che se accrescasi , o diminuiscasi l' incognità di un' opportuna quantità $\pm m$, si potranno riprodurre i termini mancanti . Sia l' equazione generale $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ &c. $= o$: pongasi $x \pm m = y$, o sia $x = y \mp m$; fatta la sostituzione , si avrà la trasformata

$$\left.\begin{array}{l} y^n \mp nmy^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}m^2y^{n-2} - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}m^3y^{n-3} \text{ \&c.} \\ + ay^{n-1} \mp (n-1)amy^{n-2} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}am^2y^{n-3} \text{ ec.} \\ + \quad by^{n-2} + \quad (n-2)bmy^{n-3} \text{ ec.} \\ + \quad cy^{n-3} \text{ ec.} \end{array}\right\} = o$$

la quale avrà tutti $+$ i termini , purchè niuno dei nuovi coefficienti si distrugga ; per il che si richiede , che m abbia piuttosto alcuni valori , che alcuni altri .

La scelta di questi non è sì facile in teorica : In pratica però , qualora sieno i coefficienti numerici , si potrà conoscere di leggieri coll' esperienza , se qualche valore di m non abbia la debita qualità ; e nell' equazioni dotate di coefficienti letterа-

terali, si riconoscerà questo subito, che sieno dati i di loro valori.

1084. Generalmente, converrebbe scioglier il problema seguente. Dato un numero n di lettere, delle quali alcune sieno positive, ed altre negative, e date le funzioni esprimenti i loro prodotti a due, a tre, a quattro &c. in caso che una ò più di tali funzioni, compresavi la loro somma si distrugga, trovare una quantità di cui essendo ciascuna di tali lettere accresciuta, o diminuita, non si distrugga più nessuna delle suddette funzioni.

1085. *Scolio*. Il Sig. D. Tommasini (*pag.* 65. *Tom. II.*) punto non riflette alla quantità di m, e crede di aver provato assai, con aver dedotta un' equazione di terzo grado mancante del terzo termine, ad un' equazione, la di cui forma apparisce generalmente completa.

CAPITOLO IV.

Dei Limiti delle radici

1086. Limiti di una radice diconsi due quantità, delle quali una superi la radice stessa, e l' altra ne sia minore; in guisa però, che poco differiscano dal di lei valore, e non comprendano per conseguenza, verun' altra radice fra di loro. Così essendo a, b, c &c. le radici reali di un' equazione, sono a^1, b^1, c^1 &c. limiti respettivi, di esse, qualora a cada fra a^1, e b^1; b cada fra b^1, e c^1 e così dell' altre.

1087. Molte volte avviene, che per ottener le radici di un'equazione, non basta eliminar le inco-

incognite, e trasformare opportunamente l'equazioni che ne provengono; e questo avviene perchè i metodi dell'*Analisi* non si estendono generalmente all'equazioni di qualunque grado. In questi casi si ha ricorso alla ricerca dei limiti, come ad una risorsa molto vantaggiosa. Noi passiamo ad esporre i Teoremi che appartengono alla dottrina dei limiti, ed i principj dai quali dipende il di loro ritrovamento.

1088. *Teor.* Se in un'equazione del grado n si sostituiscano successivamente $n+1$ quantità reali $p<q<r<s$ &c. π, e ciascuna sostituzione produca nella somma de'termini della risultante, un segno diverso da quello, che fu prodotto dalla sostituzione precedente, e susseguente, una tal equazione deve aver tutte le radici reali, e le quantità sostituite debbon esserne altrettanti limiti.

Dimostrazione. Due quantità la di cui sostisuzione produca mutazione di segno nella somma de'termini di un'equazione, non possono contenersi fra due radici contigue (*n.* 1021.) ma debbon esse contenere dentro di loro una o più radici reali di numero impari (*n.* 1019.) Ciò posto si vede, che non si può supporre, che due qualunque delle quantità p, q, r &c. comprendano fra di loro più di una radice, perchè altrimenti una delle quantità precedenti à π supererebbe già l'ultima radice, e per conseguenza le sostituzioni delle quantità rimanenti non potrebbero più produrre alcuna variazione di segno, e non si avrebbe perciò il numero n di variazioni, come si suppone. Dunque ciascuna coppia delle quantità p, q, r &c. deve comprendere una sola, e diversa radice dell'equazione proposta: questa poi dev'esser sempre reale

atte-

attesa la mutazione del segno (*n.*1020.). Dunque le radici dell'equazione di cui si tratta, debbon esser tutte reali, e le quantità p, q, r &c, debbon esserne altrettanti limiti.

1089. *Teor.* Se si moltiplichi ciascun termine di un'equazione, che abbia tutte le radici reali, per l'esponente che ha in esso l'incognita, l'equazione risultante ha tutte le radici reali, e sono esse altrettanti limiti delle radici dell' equazione principale.

Dimostrazione. Sia l'equazione $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ ec. $= 0 \ldots (A)$. Moltiplicando ciascun termine per l'esponente dell'incognita, si ha la trasformata ..... $nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3}$ &c. $= 0$ .....(*B*)

In questa si faccia $x = y + t$; L' ultimo termine della trasformata sarà (*n.*1053.) ..... $t^n + at^{n-1} + bt^{n-2} +$ &c. ..... (*C*), e il penultimo $y \cdot nt^{n-1} + (n-1)at^{n-2} + (n-2)bt^{n-3}$ &c. ..... (*D*) Ora se nelle funzioni (*C*), (*D*) si ponga x in luogo di t, la funzione (*C*) svanisce, e la funzione (*D*) divisa per y, diviene uguale all'equazione (*B*).

Dunque la questione si riduce a dimostrare, che il penultimo termine (*D*) della trasformata ha tutte le radici reali. Eccone la dimostrazione. I fattori dell'equazione (*A*) sieno $x-p$, $x-q$, $x-r$ &c. $x+f$, $x+h$, $x+g$. &c. e questi sieno così disposti, che le radici positive p, q, r &c. da una parte; e le negative f, h, g &c. dall'altra, procedano per ordine di grandezza. Per la sostituzione di $y+t$ in luogo di x, i fattori della trasformata debbon essere $y+t-p$, $y+t-q$, &c. $y+t+f$, $y+t+h$ &c.. Si faccia $t=p$, ed i suddetti fattori diverranno $y+p-p$, $y+p-q$ &c. $y+p+f$, $y+p+h$ &c. Ora a motivo del fattore

$y+$

$y+p-p$ l'ultimo termine della trasformata svanisce; dunque tolto tutto ciò che si distrugge per cagione di tal fattore, rimarrà un'equazione, che noi chiameremo *mutilata*, perchè priva dell' ultimo termine, in paragone della trasformata primitiva, delquale i fattori saranno $y+p-q$, $y+p-r$ &c. $y+p+f$ &c. Pongasi adesso per t la seconda radice q, e per la stessa ragione, i fattori della *mutilata* saranno $y+q-p$, $y+q-r$ &c. $y+q+f$ &c.; Sostituiscasi in simil guisa la terza radice r, e i fattori della trasformata mutilata saranno $y+r-p$, $y+r-q$ &c., $y+r+f$ &c. e così in seguito.

Si osservi adesso, che essendo $p<q<r$ &c. $f<h<g$ &c. le radici $p-q$, $p-r$ &c. sono tutte negative, eccettuate le radici $p+f$, $p+h$ &c.; e che per la sostituzione di q in luogo di t, le radici $q-p$, $q-r$ &c. sono tutte negative eccettuata la prima. Ora tali radici sono i fattori dell'ultimo termine dell' equazione *mutilata* o sia dell'ultimo termine (*D*); dunque detto termine dee prender segno diverso nella somma de'suoi termini, per la sostituzione di p, e q in luogo di t.

Parimente si vede, che detto Termine (*D*) dee prender segno diverso per la sostituzione di r per t, da quello che aveva per la sostituzione di q, poichè in questo caso le radici della *mutilata*, e perciò le radici del termine (*D*) sono $r-p$, $r-q$ &c. le quali sono tutte negative meno due, eccettuate però sempre le radici $r+f$, $r+h$ &c. che sono tutte positive. Proseguasi lo stesso raziocinio, e si vedrà, che la sostituzione di ciascuna radice della proposta nella trasformata produce una successiva mutazione di segno nel termine (*D*). Volendo sostituire per t anche le radici negative f, h, g &c. avrà luo-

luogo l'istesso. Dunque in virtù del Teor. prec. l'equazione $at^{n-1}+(n-1)at^{n-2}+(n-2)bt^{n-3}$ &c. $=0$ e sia l'equazione $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}$ ec. $=0$ dee aver tutte le radici reali, e queste debbon essere altrettanti limiti delle radici p, q, r &c. f, h, g &c.

E'in virtù di quetto Teor. che qualunque trasformata dedotta da un'equazione data, come l'equazione (B) è dedotta dall'equazione (A), dicesi equazione de' limiti.

1090. *Teor.* Se un'equazione abbia tutte le radici reali, le ha tali anche l'equazione de'limiti.

Dimostrazione. Segue dal Teor. preced.

1091. *Teor.* Se l'equazione de'limiti di un'equazione qualunque contenga delle radici immaginarie, di tali radici ne dee contenere anche l'equazion principale da cui è derivata.

Dimostrazione. Altrimenti, da un'equazione che abbia tutte le radici reali, si potrebbe dedurre l'equazione de'limiti affetta da radici immaginarie; il che è contrario al Teor. (*n.*1089)

1092. *Teor.* Ancorchè l'equazione de' limiti non contenga veruna radice immaginaria, ne può contenere l'equazion principale da cui deriva.

Dimostrazione. L'equazione de' limiti di un'equazione qualunque non è altro che l'equazione, da cui vengon determinati tutti i valori che possono render l'equazione principale, considerata come funzione, un massimo, o un minimo, (*n.*590.). Ma un' equazione del grado n può ricevere $n-1$ massimi, o minimi, ancorchè abbia delle radici immaginarie; perchè essendovi n valori che la rendono eguale a zero, qualunque sieno le sue radici, o reali, ò immaginarie, siccome seguono $n-1$ pas-

passaggi da zero a zero è chiaro che può ricevere indipendentemente dalla natura delle sue radici, $n-1$ fra massimi, e minimi. Dunque l'equazione de' limiti può aver tutte le radici reali, e non averle tali l'equazione principale

1093. *Teor.* Se in un' equazione, che abbia delle radici reali diseguali a, b, c &c. si sostituiscano in luogo dell'incognita due quantità m, n, tali che $m-n$ sia minore della minima differenza delle radici reali diseguali, e tali che la maggiore m superi una almeno delle radici suddette, e che non cadano ambedue fra due radici contigue per ordine di grandezza, le somme de'termini dell'equazioni trasformate risultano di segno diverso, ed m, n comprendono fra di loro una sola radice reale, di cui per conseguenza ne sono i limiti.

Dimostrazione. Abbiasi l' equazione ..... $(x-a)(x-b)(x-c)$ &c. $=0$. Sostituite per x le quantità m, n si hanno le due trasformate ..... $(m-a)(m-b)(m-c)$ &c. $=0$ ... (A)
$(n-a)(n-b)(n-c)$ &c. $=0$ ... (B)

Siccome m, n non debbon cadere fra due radici contigue, sia $m>a$, ed $n<a$; è manifesto che i primi fattori delle trasformate $m-a$, $n-a$ sono dotati di segno diverso: qualora dunque si potesse provare che ciascuna coppia di fattori corrispondenti $m-b$, $n-b$; $m-c$, $n-c$; &c. debb' aver sempre il medesimo segno, sarebbe provato che l' espressione (A) debb' aver segno diverso dall' espressione (B). Ora io osservo, che se m sia .... $<b<c<d$ &c, n dev' essere, per più forte ragione $<b<c<d$ &c.; dunque in quest' ipotesi i segni de' fattori corrisponenti risultano gli stessi.

Supponendo che sia $m>b>c>d$ &c. non si vede con

de con egual facilità, che debba essere anche... $n>b>c$, &c. ma che ciò sia così, eccone la dimostrazione. Sia $m>b$: siccome si ha $m-n<\lambda$ (detta λ la minima differenza delle radici reali diseguali) si ponga $a-b$ in vece di λ, e dal rapporto $m-n<a-b$, che è vero generalmente, si avrà $n>b-a+m$, e per più forte ragione, $n>b-m+m>b$. Lo stesso vale per il caso in cui sia $m>c$, perchè dal rapporto $m-n<a-c$ si deduce $n>c$, e così in seguito. Dunque i fattori corrispondenti delle funzioni (A), (B), eccettuati i primi, sù i quali si è fatta la supposizione, son tutti dotati del medesimo segno: dunque &c.

1094. L'ipotesi determinata da noi fatta, che fosse $m>a$ ed $n>a$, non deroga punto alla generalità del Teorema, perchè se facciasi qualunque altra ipotesi, ha luogo la medesima dimostrazione.

Difatto sia $m>b$, ed $n<b$ per prima ipotesi. Sarà molto più $m>a$ (supposto che le radici a,b,c ec. procedano per ordine di grandezza) e per mezzo del rapporto $m-n<a-b$ si proverà come sopra, che n ancora dev' essere $>a$. Per i fattori che succedono $m-b$, $n-b$, la dimostrazione è la stessa, che quella di cui si è fatt' uso di sopra.

Rimane da dimostrarsi, che fra m, ed n non vi si possa comprendere che una sola radice reale. Per concepire la verità di questo, che pure non presenta veruna difficoltà, sia $b=a+k$, e suppongasi che essendo $n<a$, sia $m>a$ e $>b$; sarà dunque $n<a$, ed $m>a+k$; dunque..... $m-n>a+k-a>k$, contro l'ipotesi che sia... $m-n<\lambda$; dunque fra m ed n non vi si può comprendere più di una radice reale.

1095.

1095. *Scol.* Dicesi da qualche Algebrista, che se per la sostituzione successiva dei valori 1, 2, 3, 4, 5 &c. in luogo dell'incognita di una data equazione, si ottenga una variazione di segno nella somma de' termini, i due valori, che hanno prodotta una tal variazione debbon riguardarsi come limiti di una radice reale. E' facile però a vedersi, in virtù del Teor. Antec., che ciò non è vero generalmente, e che qualora si abbia qualcheduna delle differenze delle radici reali minore di 1, la mutazione di segno nelle somme dei termini, non basta per assicurare che i valori da cui è stata prodotta una tal variazione sieno limiti di una radice reale.

CAPITOLO V.

Di alcune specie particolari di equazioni.

1096. Ciò che da noi è statò detto fin qui, appartiene propriamente all' equazione considerata in generale. Vi sono però dell' equazioni speciali le di cui particolari proprietà fa d'uopo conoscer pienamente innanzi di entrar nell' Analisi. Tali sono l' equazioni à radici eguali; l'equazioni Omogenee, e l' equazioni Lineari. Di queste ci proponiamo di trattare presentemente; soggiungeremo in appresso qualche riflessione intorno all' equazioni Finali.

SEZIONE I.

Dell' equazioni a radici eguali.

1097. Se abbiasi un' equazione, la quale contenga un numero n di radici eguali, la sua equazione de' limiti dee contenere un numero $n-1$ delle medesime radici.

Dimostrazione. Sia l' equazione ..... $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}$ &c. $=0$ ed abbia n radici eguali ad a. E' certo che l'ultimo termine dev' esser' un multiplo di a^n, e che il penultimo dev' essere un multiplo di a^{n-1} (*n.* 1013). Dunque se pongasi $x=y=t$, la trasformata in y deve avere n radici $=a-t$; perciò l'ultimo termine dev' essere un multiplo di $(a-t)^n$, ed il penultimo un multiplo di $(a-t)^{n-1}$; Ora l'ultimo termine della trasformata è $t^m+pt^{m-1}+bt^{m-2}$ &c. e il penultimo.... $y(mt^{m-1}+(m-1)pt^{m-2}+(m-2)qt^{m-3}$ &c.). Si divida il penultimo per y, e si ponga in ambedue x in vece di t. Con questo l' ultimo termine divien uguale all' equazion proposta, ed il coefficiente del penultimo eguale all' equazione de' limiti; Ma per ciò, che si è veduto dev' esser detto coefficiente un multiplo di $(a-t)^{n-1}$, o sia di ..... $(a-x)^{n-1}=(x-a)^{n-1}$; dunque facendolo eguale a zero, dee somministrare $n-1$ radici eguali ad a; dunque l'equazione de' limiti &c.

1098. *Probl.* Determinare se un' equazione data abbia delle radici eguali, e quante ne abbia.

Soluzione Dall' equazione proposta si deduca l'equazione di cui le radici sono le differenze di quelle della proposta, (*n.* 1067.); se questa avrà delle radici eguali a zero, avrà la proposta delle radi-

ci

ci eguali, altrimenti non ne avrà. Per conoscer poi quante debbano esser le radici eguali basta osservare, che essendo $\frac{n(n-1)}{2}$ le radici eguali a zero, n debbon esser le radici eguali.

SEZIONE II.

Dell' equazioni Derivative.

1109. Data un' equazione $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ ec. $= 0$ se si moltiplichi l'esponente di ciascun suo termine per una costante, essa diviene del genere derivativo. Quindi la formola generale di questa sorta di equazioni è $x^{n.m} + ax^{(n-1)m} + bx^{(n-2)m}$ &c. $= 0$ ...(A) essendo m, n, a, b, c &c. tutte quantità indeterminate. Quest'equazioni si vede che possono sempre deprimersi ad un grado inferiore: basta porre $x^m = y$, e si ha una trasformata del grado n, $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2}$ &c. $= 0$.

1110. *Scol.* All'equazioni Derivative appartengono quelle, che essendo di grado pari, sono mancanti dei termini di sito pari, come si può vedere, facendo nella formola (A), $m = 2$.

Non è però vero altrimenti, che riducasi al genere derivativo la formola $x^{m^n} + ax^{m^{n-1}} + bx^{m^{n-2}}$ ec. $= 0$, ancorché l'ultimo esponente dell' incognita non sia l'unità, come dice un moderno Algebrista, perchè gli esponenti dell'equazioni derivative conservano fra di loro una differenza costante m, e nell' equazioni, comprese nella suddetta formola, la differenza degli esponenti non è costante.

1111. *Teor.* Ogni equazione di grado pari, che abbia tante coppie di radici eguali con segno diverso,

quante unità contiene la metà del suo massimo esponente, è priva generalmente de' termini di sito pari, ed è perciò del genere derivativo.

Dimostrazione. Le radici dell'equazione debbon essere per ipotesi a, $-a$, b, $-b$, c, $-c$ &c. fino al numero divisato. Ora i coefficienti non son altro, che le somme respettive di tutti i prodotti possibili delle radici combinate insieme tante in una volta, quante unità meno una, contiene l'ordine del posto, che è occupato dal termine, a cui essi appartengono. Dunque (omesso il coefficiente del secondo termine, la di cui distruzione è per se manifesta)ne segue, che un coefficiente qualunque di sito pari dev'esser eguale alla somma dei prodotti delle radici combinate insieme in numero di $2m+1$ (intendendosi per $2m+1$ un qualunque numero impari). Ora la somma di questi prodotti dev' esser eguale alla somma del prodotto per $-a$ di $2m$ radici moltiplicate insieme, più il prodotto per $+a$ delle medesime $2m$ radici moltiplicate insieme: del prodotto per b di $2m$ radici moltiplicate insieme, più il prodotto per $-b$ delle medesime $2m$ radici moltiplicate insieme, e così in seguito; Dunque si vede, che i coefficienti di sito pari &c. &c.

1112. *Scol.* La distruzione de' termini di sito impari non dee succedere, perchè i loro coefficienti essendo composti dei prodotti di un numero pari di lettere, debbon contenere le potenze quadrate di ciascuna radice, ed i prodotti di tali potenze, le quali non possono svanire assolutamente. Viceversa

1113. *Teor.* Se in un' equazione derivativa di grado pari manchino i termini alternativamente, essa

essa ha tante coppie di radici eguali con segno diverso, quante unità contiene la metà del suo massimo esponente.

Dimostrazione. Sia l'equazione $x^{2n} + ax^{2n-2} + bx^{2n-4}$ &c. $=0$, e si ponga $x^2=y$; si avrà la trasformata $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2}$ &c. $=0$. Sieno p, q, r &c. le sue radici, e si avrà $x^2=y=p$, onde $x=\pm\sqrt{p}$ $x^2=y=q$, e perciò $x=\pm\sqrt{q}$: così $x=\pm\sqrt{r}$ &c. fino al numero n di radici.

1114. *Teor.* Nell'equazioni Derivative, detta m la costante, che moltiplica gli esponenti, mancano successivamente fra un termine, e l'altro $m-1$ termini.

Dimostrazione. Moltiplicando una serie di numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c. per un numero qualunque, nella serie che ne proviene, mancano tanti termini, quante unità meno una si contengono nel moltiplicatore. Ma gli esponenti di un'equazione del grado n formano appunto una serie di numeri naturali n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ 1,

Dunque moltiplicando tutti gli esponenti n, $n-1$, $n-2$ &c. per m, nella serie, che ne risulta, debbon mancare fra un esponente, e l'altro $m-1$ esponenti. Dunque debbon mancare $m-1$ termini, come si dovea dimostrare.

1115. *Teor.* Un'equazione Derivativa, espressa generalmente dalla formola $(\mathcal{A})$, non può avere un numero di radici reali $>2n$, se m sia pari, e non può avere un numero di radici reali $>n$, se m sia impari.

Dimostrazione. Posto nella suddetta formola $x^m=y$, si ha la trasformata $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2}$ &c. $=0$, di cui le radici sono n. Essendo m pari, per ot-

tenere il valor di x, deesi estrarre da ciascuna di esse una radice pari, e perciò il numero dei valori di x, a motivo del doppio segno del radicale, debbon esser $2n$. Qualora poi m sia impari, il radicale non ammette doppio segno, ed i valori reali di x rimangono di numero n. Di quì ne segue, che se m sia pari, il numero delle radici immaginarie dell' equazione (A) sia $mn-2n$, e che essendo m impari, un tal numero sia $mn-n$.

1116. *Teor.* Un' equazione derivativa di grado impari contiene generalmente delle radici immaginarie.

Dimostrazione. Affinchè un' equazione sia derivativa, conviene che sia $m>1$; affinchè poi sia di grado impari, conviene che m, ed n sieno impari ambedue. Non può esser dunque m che $=$, ò >3; Ma si è veduto che le radici reali di un'equazione derivativa qualunque non possono esser di numero $>2n$; in questa ipotesi le radici debbon esser di numero $=$, ò $>3n$. Dunque &c.&c.

1117. *Teor.* Ogni equazione derivativa, nella quale i termini alternativamente mancanti sieno di numero >1, contiene delle radici immaginarie.

Dimostrazione. Affinchè i termini mancanti sieno di numero >1 bisogna che sia $m=$, ò >3, e le radici di num.° $=$, ò $>3n$; mà le radici reali non possono esser più di $2n$; dunque &c.

SEZIONE III.

Dell'equazioni Pure.

1118. Equazioni pure sono quelle, nelle quali vi è un sol termine affetto dall' incognita, e per-

perciò diconsi ancora equazioni di due termini; La formola di queste equazioni è $x^m \pm K = o$.

1119. *Problema*. Dato un fattore di un'equazione pura qualunque $x^m \pm K = o$ trovar l'altro fattore, che moltiplicato per il fattore dato, produca l'equazione proposta;

LEMMA.

Dato un binomio $p^m \pm q^r$ si dimanda un polinomio, per cui, moltiplicando detto binomio, ne risulti un prodotto binomiale, nel quale il primo termine sia $= p^n$, e il secondo sia una funzione di q, in cui non abbia parte p.

Soluzione. Il polinomio richiesto sia ..... $p^\alpha q^\gamma + p^\delta q^\varepsilon + p^\mu q^\nu + p^\omega q^\varphi$ ec. e il prodotto di questo polinomio per $p^m \pm q^r$ disposto in due serie (A), (B) sarà il seguente .....

$$p^{m+\alpha}\,q^{\gamma} \quad p^{m+\delta}\,q^{\varepsilon} \quad p^{m+\mu}\,q^{\nu} \quad p^{m+\omega}\,q^{\varphi} \text{ \&c..}(A)$$

$$p^{\alpha}\,q^{r+\gamma} \quad p^{\delta}\,q^{r+\varepsilon} \quad p^{\mu}\,q^{r+\nu} \quad p^{\omega}\,q^{r+\varphi} \text{ \&c.....}(B)$$

Ora poichè il primo termine del prodotto richiesto dev'essere $= p^n$, pongo $p^{m+\alpha} q^\gamma = p^n$, e concludo $m+\alpha = n$, cioè $\alpha = n - m$, e $\gamma = o$.

Inoltre siccome il prodotto dev'esser per ipotesi un binomio, i termini intermedj si debbon tutti distruggere vicendevolmente; perciò, se il binomio proposto sia $p^n + q^r$, i termini del moltiplicatore, esistenti nei siti pari, dovranno esser negativi; se il binomio proposto sia $p^n - q^r$, i termini del moltiplicatore dovranno esser tutti positivi. Quindi si debbono avere le seguenti equazioni.

$$\begin{array}{lcl}
m+\delta=\alpha\text{, cioé} &)(& \delta=\alpha-m=n-2m \\
\quad\varepsilon=r+\gamma & & \varepsilon=r \\
m+\mu=\delta & & \mu=\delta-m=n-3m \\
\quad\nu=r+\varepsilon & & \nu=2r \\
m+\omega=\mu &)(& \omega=\ \ -m=n-4m \\
\quad\varphi=r+\nu & & \varphi=3r \\
\text{\&c. \&c.} & & \text{\&c. \&c.}
\end{array}$$

Sostituíti questi valori, il polinomio richiesto diviene $p^{n-m}\mp p^{n-2m}q^{r}+p^{n-3m}q^{2r}\mp p^{n-4m}q^{3r}+$ &c. e il prodotto

$p^{n}\mp p^{n-m}q^{r}+p^{n2m}q^{2r}\mp p^{n-3m}q^{3r}+$&c.

$\pm p^{n-m}q^{r}-p^{n-2m}q^{2r}\pm p^{n-3m}q^{3r}-$ &c.

$\pm p^{n-sm}q^{sr}$. Ma l' ultimo termine dev' esser privo di p; dunque $n-sm=0$, ed $s=\frac{n}{m}$, e $sr=\frac{nr}{m}$.

Ecco pertanto che il polinomio cercato è .....

$p^{n-m}\mp p^{n-2m}q^{r}+p^{n-3m}q^{2r}\mp p^{n-4m}q^{3r}$ &c.....

$\pm p^{n-sm}q^{sr}$. Eccoci adesso alla soluzione del problema.

Si ponga $x^{n}\pm K=p^{n}\pm q^{\frac{nr}{m}}=0$; che è il prodotto del polinomio trovato per il binomio $p^{m}\pm q^{r}$. Il fattore dato, che sia $x^{m}\pm\Pi=0$, si ponga..... $=p^{m}\pm q^{r}$, (supposizione sempre possibile, perchè q ed r sono due indeterminate, e possono sodisfare a due equazioni) e l' altro fattore cercato sarà, fatte le sostituzioni di x in vece di p, e di $\sqrt[n]{K^{m}}$ in luogo di q^{r}, ...

$x^{n-m}\mp x^{n-2m}\sqrt[n]{K^{m}}+x^{n-3m}\sqrt[n]{K^{m}}^{2}\mp x^{n-4m}\sqrt[n]{K^{m}}^{3}$ &c.

e posta $\sqrt[n]{K^{m}}=H$, sarà finalmente .....

$x^{n-m}\mp Hx^{n-2m}+H^{2}x^{n-3m}\mp H^{3}x^{n-4m}+$ &c.

1120

1120. *Teor.* Un' equazione pura di grado impari non può aver più di una radice reale: ed un' equazione pura di grado pari non ne può aver che due.

Dimostrazione della prima parte. Sia $n=2p+1$, ed $m=1$, supposizione possibile, perchè da una quantità qualunque $\pm K$ si può sempre estrarre una radice impari reale. Con questo il fattor polinomio del binomio $x^n \pm K = x^{2p+1} \pm K = 0$ diviene..... $x^{2p} \mp Hx^{2p-1} + H^2x^{2p-2} \mp H^3x^{2p-3}$ &c. Ma i fattori lineari di questa funzione sono tutti immaginarj; perchè dividendola ordinatamente per la serie $1, H, H^2, H^3$ &c, il che non altera punto la realità delle radici (*n.* 1099.) diviene..... $x^{2p} \mp x^{2p-1} + x^{2p-2} \mp x^{2p-3}$ &c. che posta $=0$ è un' equazione impossibile, a motivo che la somma di un numero di quantità reali non può essere eguale alla somma dei prodotti a due, a tre, a quattro &c. delle medesime quantità. Dunque la funzione .... $x^{2p+1} \pm K$ non può avere altri fattori reali di primo grado, che $x \pm q^r$: dunque non può aver x, che un sol valor reale, e perciò non ne può aver di più la radice $2p+1$ di K.

Dimostrazione della seconda parte. Per veder la verità della seconda parte, basta osservare, che l'equazione pura essendo in questo caso $x^{2p} \pm K = 0$, si ha $x = \pm \sqrt[2p]{\mp K} = \pm \sqrt{\pm} \sqrt{\pm} \sqrt{\pm}$ &c..... $\pm \sqrt{\mp K}$, formola, la quale ben si conosce, che non può dare più di due valori reali.

SE-

SEZIONE IV.

Dell' equazioni Convertibili, Omogenee, e Lineari.

1121. Equazione Convertibile è quella, in cui il primo termine sia della forma x^{2p}, e l' ultimo della forma a^{2p}; ed inoltre un termine qualunque, posto fra il primo ed il medio, sia tale, che essendo diviso per un opportuno fattore di a^{2p}, risulti affetto dal medesimo segno, e dal medesimo coefficiente, da cui è affetto il termine corrispondente, posto fra il medio, e l'ultimo termine, e così in seguito. L' equazione ..... $x^4+bx^3+c^2x^2+a^2bx+a^4=0$ per es.°, è convertibile, perchè dividendo il penultimo termine a^2bx per a^2 fattore di a^4, ne proviene bx, termine dotato del medesimo coefficiente, di cui è dotato il termine corrispondente bx^3.

1122. Dall' idea dell' equazione convertibile ne segue, che se in un' equazione di questa sorta, manchi qualche termine, vi deve mancare parimente quello, che gli corrisponde. Percio si può riferire a questa specie di equazioni l' equazione pura di grado pari $x^{2p}\pm a^{2p}=0$, che abbia l' ultimo termine della stessa forma del primo.

1123. Equazione omogenea è quella, nella quale la somma degli esponenti è in ciascun termine la medesima. La formola generale di quest' equazioni è $x^{2p}+ax^{2p-1}+b^2x^{2p-2}+cx^{3p-3}+..+K^{2p}=0$.

1124. *Scol.* Che in ogni equazione si debba osservare l'omogeneità dei termini, e che non essendovi espressa, si debbano supporre moltiplicati, o divisi i suoi termini per le opportune potenze dell' unità, onde poterla riguardar come tale

tale, si va dicendo da qualche Algebrista, e fra gli altri si può vedere l'Algebra del Ch. Nicolao de Martino *lib.* 11. Cap. 3. pag. 121. del T. I. Una tal proposizione però, se prendasi generalmente, è assolutamente falsa, perchè trattandosi di equazioni puramente Algebriche, ben si vede, che per es.° fra x^2 ed a vi può essere una perfetta eguaglianza. Una tale omogeneità è solo necessaria nell'equazioni, che appartengono ad un problema geometrico. In queste, se non abbiasi l'opportuna omogeneità, espressa, o implicita, non è possibile il problema, perchè non è possibile l'equazione che lo rappresenta. Così per es.° l'equazione geometrica $x^3+px^2+q=0$ non può sussistere, se q non sia moltiplicato per 1^2, ò se non intendasi per q, una funzione dotata di triplice dimensione, perchè i primi due termini rappresentano dei solidi, e questi non possono avere alcun rapporto con una linea, nè con una superficie.

SEZIONE V.

Dell' equazioni Finali, e della loro Sede.

1125. Equazione finale dicesi quell'equazione a cui si riduce la soluzione di un problema, dopo che si sono eliminate tutte le incognite possibili.

1126. Un' equazion finale può essere assorda, cioè può condurre ad un risultato contradittorio, e questo avviene (*n.*1028) quando le condizioni del problema, da cui è derivata, involgono qualche contradizione.

1127. Un' equazion finale può essere anche identica, cioè tale che i suoi termini si distrugga-

no

no vicendevolmente per qualunque valore dell'incognita, come per es.° $ax^2+bx=ax^2+bx$: questo significa, che qualunque valore dell'incognita, che vi ha luogo, può soddisfare al problema.

1128. Qualora però s' incontri un' equazione identica, prima che siensi adempite le condizioni del problema, è sicuro che si è commesso errore nel calcolo, oppure che fra le condizioni, che accompagnano il problema, ve n' era qualchedùna di superflue, non ripugnanti. Difatto le condizioni di questo genere si contengono nelle necessarie, cioè sono ad esse identiche; debbon dunque somministrare dell'espressioni identiche, e rendere per conseguenza identica una dell' equazioni, che precede l'equazione finale.

1129. Dicesi equazion finale esistente nella propria sede, ò equazione irriducibile quella, che non si può deprimere ad un grado inferiore, con dividerla per un fattor razionale di primo grado, altrimenti dicesi riducibile, e non esistente nella propria sede.

PAR-

PARTE IV.

DELL' ANALISI IN GENERALE.

1130. L'Analisi è l'arte di scoprire, mediante de generali ingegnosissimi raziocinj le più sublimi, e recondite verità, di cui sia dato un proporzionato numero di rapporti à quantità cognite. Queste verità sono ciò, che propriamente dicesi problema. (*) Per procedere al discoprimento di queste, suppon'ella cognito, ciò che le vien proposto a trovare, ed esprime per conseguenza algebraicamente tutte le condizioni che accompagnano il problema, quasi le volesse verificare; quindi procede risolvendo, e combinando i già espressi rapporti, finchè giunga ad ottenere uguali a quantità cognite le quantità cercate, dopo di che rimane sciolto il problema. In questo poi saggio oltre modo, e meraviglioso è il suo operare. Si avanza essa con un'occulta, ordinatissima serie di raziocinj: lega le idee a semplicissimi segni, e solleva in questa maniera gli sforzi della memoria, e dell'immaginazione, che sarebbero in altra guisa indispensabili; quindi con una sagace combinazione de' suddetti segni, un linguaggio isti-

(*) *L'oggetto di qualunque problema si riduce a uno di questi tre* 1.° *O sono date una, o più quantità, e si cercano tutte, o alcune loro proprietà:* 2.° *O sono date una, o più proprietà, e si cercano le quantità alle quali convengono.* 3.° *O sono date una, o più proprietà con una, o più quantità, o si cerca se quelle convengano a queste.*

istituisce il più decisivo, e significante, e s'inoltra così, con una destrezza la più concludente ad avvicinare i rapporti delle quantità cercate con le quantità cognite, finchè giunge a ravvisare svelatamente la richiesta verità.

1131. Per una strada opposta si avanza la sintesi. Essa parte da una proposizione cognita: da essa deduce delle successive conseguenze; queste insieme le combina per derivarne dell'altre, e così prosegue componendo, finchè trovi per ultimo conseguente la verità proposta a dimostrarsi.

Vediamo un esempio di ambedue i metodi.

Data una linea AB (Fig.ª 87.) si dimanda di prolungarla in C, cosicchè ne risulti $ACB=AB^2$.

Soluzione Analitica. Sia BC il prolungamento; poichè $ACB=ABC+BC^2$ (*Geom.*), sarà pure ..... $ABC+BC^2=AB^2$; ma fatto $BD=BC$, risulta ..... $AB^2=ABC+BAD$; difatto sia $AB=a$, $BC=x$, e sarà $AD=a-x$, onde $AB^2=a^2=ax+a(a-x)=ABC+BAD$; dunque BC^2, o $BD^2=BAD$, e perciò la retta AB deve dividersi in media, ed estrema ragione.

Soluzione Sintetica. Dividasi AB in media, ed estrema ragione, cosicchè AD sia il semmento minore, e BD sia il maggiore: si prolunghi AB in C, finchè sia $BC=BD$; essendo BC^2, o $BD^2=BAD$ per ipotesi, aggiungendo ABC ad ambi i membri, si avrà $BC^2+ABC=BAD+ABC=BAD+ABD$; ma $BC^2+ABC=ACB$, e $BAD+ABD=AB^2$; dunque $ACB=AB^2$, come si doveva dimostrare.

1132. *Scol.* Quanto è adattato il metodo Analitico al discuoprimento delle verità, altrettanto è il metodo Sintetico a ciò insufficiente. Il di lui primario oggetto è di sottoporre a dimostrazione le verità trovate per Analisi.

Que-

Questo però, che che dicano gli amatori dell'antichità, egli è un misero pascolo di un ingegno, che non cura di sacrificare ad un infecondo lampo di più vivida persuasione i sudori, che deve spargere nell'incerto tentativo sintetico; e che occupati essendo nell'Analisi, potrebbero procurargli una serie più estesa di cognizioni:

Le scoperte Matematiche sarebbero state senza dubbio più sollecite, se non si fossero divagati gl' ingegni di parecchj grand' uomini à ricercare delle dimostrazioni, che niente conferiscono ad estendere le umane cognizioni, e niente rendono più sicure le verità analitiche.

Due sono gli ubertosi, amplissimi rami, nei quali si divide l'Analisi. Al primo appartiene l'Analisi determinata; l'Analisi indeterminata al secondo. Di ambedue passiamo ad occuparci seriamente.

CAPITOLO I.

Dell'Analisi Algebrica Determinata.

1133. L'Analisi che determinata si appella, ha per oggetto lo scioglimento di quei problemi, i quali sono accompagnati da tante condizioni, o rapporti, quante sono le verità incognite, che in essi hanno parte.

1134. *Scol.* Le condizioni che debbono accompagnare un problema, conviene che sieno di un preciso, e specifico significato, altrimenti, essendo di un significato generico solamente, non basterebbero a rendere il problema determinato. Eccone un esempio.

Sia proposto a trovarsi due numeri tali, che il qua-

quadrato del primo congiunto col secondo sia un quadrato; ed il quadrato del secondo congiunto col primo sia parimente un quadrato. Chiamando x, ed y i due numeri cercati, è manifesto che si dovranno avere le due equazioni $x^2+y=a^2$; $y^2+x=b^2$. Queste risciolte con qualunque metodo debbono sempre dare una soluzione indeterminata, perchè come si vede, nell'espressioni di x, ed y debbono aver parte i quadrati indeterminati a^2, e b^2.

In generale, quando fra le condizioni abbiasi che una determinata funzione di una, o più incognite debba essere uguale ad un rettangolo ab, ad una potenza a^n, ad una radice $a^{\frac{1}{n}}$ &c. dove n sia un numero determinato qualunque, se le condizioni sieno tante quante sono le incognite, il problema non potrà essere determinato.

1135. Dopo aver acquistato una chiara, e distinta cognizione dello stato, e della natura della questione tre sono le operazioni principali, che debbono dirigere l'Analista nella soluzione dei problemi determinati.

1.° Che si imponga una giusta denominazione alle quantità tanto cognite, che incognite.

2.° Che si dia una conveniente espressione alle condizioni proposte.

3.° Che si sciolgano l'equazioni ottenute, mediante le suddette espressioni.

1136. Dovendosi pertanto sciogliere un problema si deve incominciare dal fare un maturo esame sullo stato, e sulle proprietà del medesimo, sviluppandone con destrezza le condizioni, che lo accompagnano; ed infatti, siccome non può l'umana men-

mente procedere a discuoprire ciò che ignora, che per mezzo di ciò che sa, non le rimane altra guida nella ricerca di qualunque verità occulta, che ragionare quanto richiedasi, sù i rapporti, per cui essa dipende da principj cogniti.

1137. Inteso esattamente lo stato preciso della questione, ad oggetto di poter contemplare quasi riunite in un sol punto di vista, tutte le relazioni delle quantità che hanno parte nella questione, convien dare ad esse un' adattata denominazione, rappresentando con le prime lettere dell' alfabeto le quantità cognite, e le incognite con le ultime lettere del medesimo (avvertendo di non moltiplicare senza necessità il numero dell' incognite) e si debbono tradurre in linguaggio algebrico tutte le condizioni proposte, quasi che si volessero verificare; nel che l'avvedutezza, e la perspicacia soltanto possono esser di scorta. Ciascuna delle condizioni essendo così espressa, dovrà somministrare un' equazione, e perciò essendo il problema determinato, si otterranno tant'equazioni quanto sono le condizioni, o sia quante sono le incognite. Ottenute queste, tutta si deve rivolger la cura a ridurre, trasformare, combinare, e paragonare le ottenute equazioni, onde esse divengano suscettibili dei metodi dell' Analisi. Ciò fatto, altro non rimane che scioglierle mediante i metodi che si esporranno, per dedurre i valori dell' incognite soddisfacenti alla questione.

SEZIONE I.

Della soluzione dell' equazioni di primo grado .

1138. Equazioni di primo grado sono quelle (*n.* 72.) in cui la potenza dell' incognita non supera l' unità.

La formola generale di quest' equazioni è ..... $ax \pm p = 0$, ò dividendo per a, e facendo $\frac{p}{a} = q$; .... $x \pm q = 0$. E' facile poi a vedersi che a questa si riduce l'equazione $x^m \pm p = 0$, perchè facendo .... $\sqrt[m]{p} = q$ si ha $x \pm q = 0$

1139. Per risciogliер quest' equazione nel caso di una sola incognita, basta sviluppare l'incognita dalle quantità cognite da cui ella è affetta, secondo ciò che si disse al (*n.* 76. *e seg.*) per lasciar l'incognita sola in un membro e nell'altro sole quantità cognite. Ecco un esempio.

1140. *Problema .*

Militiæ pars quarta fugit, pars quinta peremptа est,
Captivasque manus portio sexta dedit;
Dux numerans reliquos, reperit bis mille trecentos:
Quæro quot ad pugnam duxerit ante viros .

Soluzione. Sia x il numero dei soldati condotti alla battaglia, e si supponga già noto. Affinchè x sia il vero numero soddisfacente alla questione, a tenore delle condizioni proposte dovrà essere

$x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 2300$; si tolgano le frazioni, con moltiplicare ambedue i membri per il prodotto dei denominatori 4. 5. 6. = 120, e si avrà ....

120

$120x=74x+2300.120$, quindi $(120-74)x$.....
$=2300.120.$, cioè $46x=276000.$, ed x .....

$$=\frac{276000}{46}=6000.$$ Difatto

$$\frac{6000}{4}+\frac{6000}{5}+\frac{6000}{6}+2300=1500+1200+1000..$$
$$+2300..$$

$=6000$, come richiede il problema.

Si può dunque render la soluzione come segue.

Dux secum sex mille viros in prælia primum
Duxit; captivas mille dedere manus.
Sunt in conflictu bis centum, & mille peremptì
Et ter quingenti corripuere fugam.

1131. Ma sieno proposte m equazioni con m incognite, tutte di primo grado, e non moltiplicate insieme.

Met. I. (*ved. n.* 1042.) Date m equazioni, ed m incognite, si prenda il valore di un'incognita da un'equazione qualunque e si sostituisca nelle altre $m-1$ equazioni: si avranno $m-1$ equazioni, ed $m-1$ incognite; da una di quest' equazioni si deduca il valore di una delle $m-1$ incognite, e si sostituisca nelle altre $m-2$ equazioni. Si otterranno $m-2$ equzioni con $m-2$ incognite. Si prosegua l'operazione, e si arriverà ad avere una sola equazione con una sola incognita.

Il valore di tal incognita, che si conoscerà facilmente, si sostituirà in una delle due precedenti equazioni a due incognite, e si conoscerà così una seconda incognita. I valori delle due incognite trovate si sostituiscano in una delle tre equazioni precedenti a tre incognite, e si conoscerà una terza incognita. Si prosegua nel modo

stesso, e si troverà il valore di ciascuna incognita. Per vederne qualche es.° sia proposto.

1132. *Probl.* Data la somma, e la differenza di due quantità qualunque, trovar ciascuna di esse.

Soluzione. Suppongasi di conoscerle, e sia x la maggiore, y la minore. La somma data essendo a, e la differenza essendo b, qualora x, ed y sieno le quantità realmente soddisfacenti al problema, dovrá essere $x+y=a$, ed $x-y=b$.

Dalla prima si deduce $x=a-y$; questo valore si sostituisca nella seconda, e si avrà $a-2y=b$ e mutando i segni, e trasponendo a, $2y=a-b$ e perciò $y=\frac{a-b}{2}$. Si sostituisca per y questo valore in una delle due primitive equazioni, per es.° nella prima, e si avrà $x+\frac{a-b}{2}=a$, o sia... $x=a-\frac{(a-b)}{2}=\frac{a+b}{2}$. Ecco dunque che le due quantitá richieste debbon esser tali, che la maggiore sia uguale alla metà della somma, e della differenza, e la minore uguale alla metà della somma, meno la metà della differenza, il che, non solo ci dà la soluzione richiesta, ma ci somministra ancora la regola generale di sciogliere qualunque problema di questo genere. E' questo un saggio dell'eccellenza, e della ricchezza dell'Algebra. A differenza delle altre Discipline sembra che essa ambisca di far pompa della propria fecondità.

1133. *Problema* 2. Dati tre massi di metallo, composti di oro, argento, e stagno, nel primo dei quali le quantità relative dei metalli compo-

nen-

nenti sieno respettivamente a, b, c: nel secondo le medesime quantità relative sieno a', b', c', e nel terzo finalmente sieno a'', b'', c''; si dimanda quanto si debba prendere di ciascun masso, perchè le tré porzioni prese da ciascuno essendo fuse insieme, formino un quarto masso, nel quale le quantità relative dell'oro, dell'argento, e dello stagno sieno respettivamente come m, n, p.

Soluzione. Dicasi O l'oro, A l'argento, ed S lo stagno. Nel primo masso le quantità dei metali saranno $aO+bA+cS$, nel secondo saranno... $a'O+b'A+c'S$, e nel terzo $a''O+b''A+c''S$. La porzione da prendersi dal primo masso sia x, quella da prendersi dal terzo sia z; siccome x, y, z debbon esser frazioni, la porzione da prendersi dal primo sarà $axO+bxA+cxS$; così quella da prendersi dal secondo masso, sarà $a'yO+b'yA+c'yS$ e quella da prendersi dal terzo, sarà..... $a''zO+b''zA+c''zS$. Ora queste porzioni riunite insieme, debbon formare un quarto misto, nel quale abbiansi i metalli nella proporzione di m, n, p cioè abbiasi $mO+nA+pS$.

Si deve dunque aver l'equazione,..... $axO+a'yO+a''zO+bxA+b'yA+b''zA+cxS+c'yS+c''zS=mO+nA+pS$: cioè si debbono avere le tre equazioni $axO+a'yO+a''zO=mO$; $bxA+b'yA+b''zA=nA$; $cxS+c'yS+c''zS=pS$....(A)

Dalla prima si ha $x=\frac{m-a'y-a''z}{a}$; questo valore sostituiscasi nelle altre due equazioni, e diverranno della forma .....

$$bm - ba^{1}y - ba^{11}z + ab^{1}y + ab^{11}z = ma$$
$$cm - a^{1}cy - a^{11}cz + ac^{1}y + ac^{11}z = pa \quad \ldots\ldots (B)$$

Dalla prima di queste si deduce .....

$$y = \frac{an - bm + ba^{11}z - ab^{11}z}{ab^{1} - ba^{1}}$$

; questo valore si ponga per y nella seconda, e si avrà .....

$$cm(ab^{1} - ba^{1}) - aa^{1}cn + a^{1}bcm - a^{1}a^{11}bcz + aa^{1}b^{11}cz - a^{11}cz + a^{2}c^{1}n - abmc^{1} + aa^{11}bc^{1}z - a^{2}b^{11}c^{1}z + ac^{11}z = pa(ab^{1} - ba^{1})\ ;$$

Il valor di z dedotto da quest' equazione si ponga in una dell' equazioni (B), e si avrà il valor di y. Ottenuti così x, ed y, si pongano tali valori in una dell'equazioni (A) e si troverà finalmente il valore di x, con che sarà sciolto il problema.

Metodo II. Si deduca il valore di una medesima incognita da ciascuna delle m equazioni; questi valori si eguaglino coppia a coppia, finchè si ottengano $m-1$ equazioni: queste conterranno $m-1$ incognite; Da ciascuna di quest'equazioni si deduca come sopra il valore di una medesima incognita. Per mezzo di questi valori si formino $m-2$ equazioni; e sarann' esse dotate di $m-2$ incognite; si prosegua la stessa operazione, finchè si giunga ad un'equazione sola affetta da una sola incognita. Si deduca il valore di essa, e si sostituisca in una delle due equazioni precedenti a due incognite, onde ottenere il valore della seconda incognita, che nella medesima si contiene. Si sostituiscano i valori delle due incognite trovate in una delle tre equazioni precedenti a tre incognite, onde ottenere il valore di una terza incognita, e così proseguasi finchè si ottenga il valore di ciascuna incognita. Es.° sia proposto il

1134. *Problema*. Dato un masso di metallo composto di due specie date di metallo, per es.° di oro, e di argento, si domanda quanto metallo di ciascuna specie entri nel composto.

Soluzione. Si determini il peso di tutto il masso, e sia b; se ne determini la solidità, e sia a. Il peso di una misura cubica, per esempio di un pollice cubico di uno dei metalli sia c, e sia d il peso di un' egual misura cubica del secondo. (Pesi che dati i metalli possono sempre trovarsi). Posto questo, il numero delle misure cubiche del metallo, di cui la misura cubica scelta pesa c, dicasi x, ed y il numero delle misure cubiche dell' altro metallo, che per ciascuna misura cubica pesa d. Si avrà primieramente $x+y=a$; e di poi si avrà ..... $cx+dy=b$. Dalla prima si dedurrà $x=a-y$, e dalla seconda $x=\frac{b-dy}{c}$; quindi paragonando questi valori si otterrà l' equazione ..... $a-y=\frac{b-dy}{c}$. Di qui $ac-cy=b-dy$, e $dy-cy=b-ac$, onde $y=\frac{b-ac}{d-c}$; perciò $x=a-y=a-\left(\frac{b-ac}{d-c}\right)=\frac{ad-b}{d-c}$. Ecco pertanto ritrovate le formole generali di x ed y, sodisfacenti a qualunque problema di questa specie. Si può anzi di più dedurre di qui la regola generale di sciogliere qualunque problema della specie, di cui si tratta. Essa è la seguente. Per ottenere la quantità di un metallo si moltiplichi il numero delle misure cubiche di tutta la massa per il peso di una misura cubica dell' altro

altro metallo; da questo prodotto si sottragga il peso del misto, e si divida il risultato per la differenza delle gravità specifiche. Per ottener la quantità dell' altro metallo, si moltiplichi il numero delle misure cubiche di tutto il masso per il peso di una misura cubica del primo metallo, e si divida il residuo per la differenza delle gravità specifiche. Questo è precisamente ciò che in arimmetica dicesi regola di Alligazione. Eccone un altro esempio.

1135. *Problema*. Dato il prezzo di due miscibili, si domanda con qual ragione si debbano insieme mischiare, affinchè il misto si possa vendere ad un prezzo dato.

Soluzione, Uno dei miscibili sia M, e per ciascuna misura vaglia c; l'altro dei miscibili sia N, e vaglia per ciascuna misura d; se un' egual misura che risulta dal misto di essi debba valer m, si avranno l'equazioni $x+y=1$, $cx+dy=m$, dove 1 è la misura, alla quale si ragguaglia il prezzo. Dalla prima si ha $x=1-y$, e dalla seconda $x=\frac{m-dy}{c}$; quindi $1-y=\frac{m-dy}{c}$, e perciò $y=\frac{m-c}{d-c}$, ed

$$x=1-\left(\frac{m-c}{d-c}\right)=\frac{d-m}{d-c}=\frac{m-d}{c-d}\ldots\ldots;\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots$$

(secondo che d è $>$ ò $<c$). Da queste formole si può dedurre, come sopra, la regola generale per la soluzione di tutti i problemi di questa specie a due incognite.

Metodo III. Si faccia uso del metodo di eliminazione esposto al n. 1041, e si otterranno egualmente i valori di tutte le incognite, e con ciò la soluzione del problema.

1136. *Scol.* Alle volte giova per la soluzione dei problemi di primo grado, ricorrere alla regola di Falsa Posizione. Essa infatti procede con un tentativo così pronto, e concludente, che la Geometria sublime, l'Astronomia ed altre parti della Fisico-Matematica non isdegnano di ricorrere a lei, come ad un espediente sommamente vantaggioso. Ecco i principj sù i quali è fondata.

La Falsa Posizione semplice, parte dall'ipotesi che una determinata quantità soddisfaccia al problema; riprova per mezzo di essa le condizioni del medesimo, e qualora non rimangano verificate, come succede generalmente, inerendo al principio, che due quantità qualunque stanno fra di loro, come i loro molteplici, e summolteplici omologhi, istituisce la proporzione: Il risultato ottenuto per la sostituzione della quantità supposta, sta al risultato proposto, come la quantità supposta alla quantità cercata; proporzione da cui si ha immediatamente il valore dell'incognita. Per darne un esempio.

1137. *Problema*. Quattro orifizj mettono acqua nel tempo stesso in una vasca: il primo di essi la riempirebbe da se solo in 2 ore; il secondo in 3 ore, il terzo in 5, ed il quarto in 6 ore. Si dimanda quanto tempo si richiede, perchè lasciandoli aperti tutti insieme, si riempia la vasca.

Soluzione. Detto x il tempo cercato, l'equazione da istituirsi è $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=1$; Ora dando ad x un valore a, ed avendo un risultato b, in virtù del principio addotto, deve aversi $b:1::a:x$, onde

onde si ottiene prontamente x . Suppongasi dunque che gli orifizj dati debbano riempir la vasca in un' ora. Il primo ne riempirà $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{5}$, ed il quarto $\frac{1}{6}$, ed il primo membro dell' equazione suddetta sarà..... $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6.}{5}$; si avrà per conseguenza $\frac{6}{5}:1::1^{ora}:x=\frac{5}{6}$ di ora $=50'$.

Non di rado avviene, che non basta una sola supposizione, ma convien farne una seconda . Di qui nasce la doppia Falsa Posizione, di cui ecco il fondamento. Se in un' equazione di primo grado, espressa generalmente per $mx\mp p$ si ponga per x un valore a, per cui si abbia un risultato b ; di poi si ponga per x un valore a' , e si abbia un risultato b', è manifesto che dovrà essere $x:a::p:b$; $x-a':p-b$, perchè i risultati variano nella ragione stessa con cui variano i valori sostituiti per x. Avvertasi che le due proporzioni addotte sono omogenee , come si comprende facilmente alternando, e si concluderà (*n.* 251) $x-a:x-a'::p-b:p-b'$ cioè: Che le differenze dei numeri sostituiti al numero cercato x sono generalmente proporzionali agli errori derivanti dai numeri sostituiti.

Trovato questo principio generale , la doppia Falsa Posizione non ha più difficoltà.

Il

Il primo dei numeri supposti sia a, ed il secondo a^1. L' errore derivante dalla sostituzione del primo sia m, e l' errore derivante dalla sostituzione del secondo sia n. Si avrà .....

$x-a : x-a^1 :: m : n$, e di qui $x = \frac{a^1m-an}{m-n}$ ....

formola generale, da servire per qualunque problema di doppia Falsa Posizione, e che ci da la regola seguente.

Regola. Si moltiplichi ciascuno dei due numeri supposti per l' errore prodotto dall' altro, e si divida la differenza di questi per la differenza degli errori.

1138. *Scol.* 1. Bisogna avvertire ai segni degli errori, perchè se essi fossero diversi, essendo uno di essi errore per difetto, e l' altro per eccesso, in questo caso una delle quantità m, n sarebbe negativa, e l' altra positiva, e perciò x diventerebbe della forma $x = \frac{a^1m+an}{m+n}$.

Per applicare adesso la regola ad un esempio sia.

1139. *Problema*. Giocando insieme due amici, quello che gioca meglio scommette dodici soldi contro otto, ad ogni partita; dopo averne fatte dieci, l' altro gli paga 20 soldi; si domanda, quante partite abbia vinte.

Soluzione. Suppongo che sieno 6.: ma in questo caso il secondo ne avrebbe vinte 4, e sarebbero stati pari; dunque l' errore del risultato è —20. Suppongo che ne abbia vinte 8, ma vedo che in questo caso il secondo ne avrebbe vinte 2, e sarebbe rimasto debitore di 40. Dunque l' errore del

del risultato è + 20; Fatto questo, nella formola $x = \frac{a^1 m - an}{m - n}$ pongo $a = 6$, $a^1 = 8$, $m = -20$, ed $n = +20$, ed ottengo $x = \frac{8 \times -20 - 6 \times +20}{-20 - 20} = \frac{-280}{-40} = \frac{280}{40} = 7$

Dunque il giocatore più bravo ha vinto sette partite: di fatto 7. 8 — 3. 12 = 56 — 36 = 20 come si richiede.

1140. *Scol.* V'è chi pretende di aggiungere un compendio alla regola data per la doppia Falsa Posizione con cercare quanto convenga aggiungere, o sottrarre dal numero che ha prodotto il più piccolo errore, e ragiona nel modo che segue.

Sia a^1 il numero che ha prodotto il più piccolo errore, ed n sia l'errore stesso; si cerchi un valore y tale, che sia $a^1 \pm y = \frac{a^1 m - an}{m - n}$, e si troverà $\pm y = \frac{a^1 m - an}{m - n} - a^1 = \frac{a^1 n - an}{m - n}$, cioè..... $y = \pm \frac{n(a^1 - a)}{m - n}$. Ma è questo poi un compendio, ovvero un prolungamento di calcolo? Si vede a prima vista, che non si può dir compendio quel metodo che per essere adoperato ha bisogno del metodo principale a cui serve.

1141. Dal fin qui detto si raccoglie, che i problemi di primo grado si possono risciogliere con quattro diversi metodi e sono I. La sostituzione dei valori di ciascuna incognita, dedotti da una delle m equazioni date, nell' altre $m - 1$ equazioni.

II. Il paragone dei valori di una medesima incognita dedotti da ciascuna delle *m* equazioni date, e questo ripetuto successivamente finchè si ottenga un' equazione ad un' incognita sola.

III. Il metodo di Eliminazione per Sottrazione.

IV. Il Metodo di Falsa Posizione semplice, o composta.

1142. Terminiamo con proporre alcuni problemi, dei quali diamo il risultato della soluzione.

Problema 1.° E' partito un corriere da Napoli per la strada di Firenze, il quale fa quattro miglia l'ora. Un altro corriere è partito sei ore dopo da Pisa per la strada di Firenze verso Napoli, e fa cinque miglia l'ora: Dato che da Pisa a Firenze vi sieno 49 miglia, e da Napoli a Firenze 350, si dimanda quante miglia dovrà fare il secondo corriere per incontrare il primo.

Soluzione $208\frac{1}{3}$

Probl. 2.° Si ha dell'acqua di mare, che sotto 32 libre di peso contiene una libbra di sale; si dimanda quanto bisognerebbe d' acqua dolce, perche sotto 32 libbre di mescolanza si contenessero due oncie di sale.

Soluzione. Libre 224 francesi, che sono di 16 oncie per libbra.

Problema 3.° Avendo un giocatore raddoppiato il suo denaro, dà un zecchino ad un'amico; raddoppia in seguito il denaro, che gli rimane, e spende un altro zecchino; si pone al gioco una terza volta, e raddoppia di nuovo il suo denaro. Si ritrova nondimeno un solo zecchino. Si cer-

cerca quanto denaro avesse prima del gioco.
Soluzione. Lire 13. 8. Soldi.

SEZIONE II.

Della risoluzione dell' equazioni di secondo grado.

1143. Equazione di secondo grado è quella, in cui la più gran potenza dell' incognita è il quadrato. La formola generale di quest' equazione è $x^2 \pm Bx \pm C = 0$, nella quale siccome quattro sono le diverse combinazioni dei segni, quattro sono le diverse formole che vi si contengono.

1144. Se sia $B = 0$, si avrà un' equazione pura $x^2 \pm C = 0$, e quindi $x = \pm\sqrt{\mp C}$, dove ad x non si dà il doppio segno, perchè le quattro combinazioni di segno, che ne nascerebbero riduconsi a due. Se sia $C = 0$, si avrà dividendo per x^2, $x = \mp B$. Non avendo luogo alcuno di questi casi, si avrà l'equazione affetta..... $x^2 \pm Bx \pm C = 0$, che passiamo a risciogliere.

1145. *Met.* I. Proposta l'equazione ..... $x^2 \pm Bx \pm C = 0$, si trasponga l'omogeneo di comparazione nel secondo membro, onde abbiasi .... $x^2 \pm Bx = \mp C$; quindi siccome si sa che il secondo termine di un quadrato, eguaglia il doppio del secondo termine della radice moltiplicato nel primo, si vede che $\frac{B}{2}$ dev' essere il secondo termine della radice di $x^2 \pm Bx + \frac{B^2}{4}$; aggiungasi anche al se-

con-

condo membro il quadrato di $\frac{B}{2}$ e si avrà .....

$x^2 \pm Bx + \frac{B^2}{4} = \frac{B^2}{4} \mp C$, ed estraendo la radice dal primo membro, che è un quadrato, si ha .....

$x \pm \frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} \pm C}$, e finalmente la formola ...

$x = \mp\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$ esprimente i due valori possibili dell' incognita x.

1146. Dalla medesima si vede che se C abbia nell' equazione proposta il segno positivo, affinchè i valori dell' incognita non sieno immaginarj, conviene che sia $\frac{1}{4}B^2 > C$: Perciò un' equazione quadratica a radici immaginarie, si rappresenterà generalmente per $x^2 \pm 2B\cos.\varphi x + B^2 = 0$, perchè essendo $\cos.\varphi < 1$ risulta.....

$\left(\frac{2B\cos.\varphi}{2}\right)^2 = (B\cos.\varphi)^2 < B^2$; ovvero per....,.....

$x^2 \mp ax + a^2 + b^2 = 0$, perchè risciogliendola si ottiene $x = \mp\frac{a}{2} \pm \sqrt{-3\frac{a^2}{4} - b^2}$

1147. *Met.* II. Si tolga il secondo termine $\pm Bx$, con porre $x \pm \frac{B}{2} = y$, o sia $x = y \mp \frac{B}{2}$;

sostituito questo valore si avrà $y^2 \mp By + \frac{B^2}{4} \ldots\ldots \pm By$

$-\frac{B^2}{2} \pm C = 0$, equazione che si riduce ad.....

$y^2 = \frac{B^2}{4} \mp C$, da cui si ha $y = \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$ e

perciò si ottiene $x = y \mp \frac{B}{2} = \mp \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$.

1148. *Met.* III. Sieno $\pm a \pm b$ le radici dell' equazione proposta $x^2 \pm Bx \pm C = 0$; si avrà (*n* 1006) $(x \mp a)(x \mp b) = x^2 \mp ax + ab = x^2 \pm Bx \pm C = 0 \ldots\ldots \mp bx$

identicamente. Dovranno essere per conseguenza eguali i coefficienti omologhi, e perciò dovrà aversi $\mp(a+b) = \pm B$, ed $ab = \pm C$. Dalla seconda equazione si deduce $b = \pm \frac{C}{a}$, valore che essendo sostituito nella prima, la rende della forma $a^2 \mp Ba = \mp C$, e di qui $a = \mp \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$, e....

perciò $\pm b = \mp \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$, d'onde si ha la formola generale come sopra, $x = \mp \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$. Que-

sto

sto è un metodo che richiede il primo, e perciò nella pratica non è di alcun giovamento.

1149. *Mct.* IV. Sia $\pm 2a$ la somma delle radici richieste, è $\pm 2b$ ne sia la differenza. La maggiore di esse sarà (*n.*1132) $= \pm(a+b)$, e la minore $= \pm(a-b)$; quindi $(x \mp a \mp b)(x \mp a \pm b) \ldots\ldots = x^2 \mp 2ax + a^2 - b^2 = x^2 \pm Bx \pm C = 0$; perciò sarà come sopra $\mp 2a = \pm B$, $a^2 - b^2 = \pm C$. Dalla prima si ottiene $a^2 = \frac{B^2}{4}$: sostituito questo valore nella seconda si trova $+ b^2 = \frac{B^2}{4} \mp C$, e mutando i segni, ed estraendo la radice $\pm b = \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$; per conseguenza $\pm a \pm b = \pm\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$, e .. $\pm x \mp b = \pm\frac{B}{2} \mp \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$, d'onde si ha ..... $x = \pm\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} \mp C}$.

1150. *Scol.* Vi è un quinto metodo per l'equazioni numeriche, esposto non a molto da un' Algebrista, come una risorsa vantaggiosa, nel caso, dic' egli, che i coefficienti dell'equazione proposta sieno molto grandi, e frazionarj. Vediamo in che consista.

Sia

Sia 1.° l' equazione $x^2 + Bx + C = 0$, onde si abbia $x = -\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - C}$; questi due valori di x si mettano sotto la forma..... $-\frac{1}{2}B\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}}\right)$. Quindi si faccia $\sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}} = \sqrt{1 - sen.^2 A}$, e si dedurrà facendo il quadrato, ed estraendo in appresso la radice, si dedurrà dico.... $sen. A = \frac{2\sqrt{C}}{B}$, e perciò $\frac{\sqrt{C}}{sen. A} = \frac{B}{2}$. Mettasi dunque nell' ultima espressione di x, $\frac{\sqrt{C}}{sen. A}$ in vece di $\frac{1}{2}B$ e $cos. A$ in vece di $\sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}}$, giacchè..... $cos. A = \sqrt{(1 - sen.^2 A)}$, e si avrà..... $x = -\frac{\sqrt{C}}{sen. A}(1 \mp cos. A)$, e sostituendo i valori di $1 - cos. A$, e di $1 + cos. A$, mediante le formole $sen. a = 2\, sen.\frac{1}{2}a\, cos.\frac{1}{2}a$

$$cos. a = cos.^2\frac{1}{2}a - sen.^2\frac{1}{2}a$$

si dedurrà $x = -tang.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, $x = -cot.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$.

Deter-

Determinato pertanto l'arco $\mathcal{A}$ per mezzo dell'equazione $sen.\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{C}}{B}$ si ottengono immediatamente i due valori cercati di x.

II. Abbiasi adesso l'equazione generale col primo coefficiente B negativo, ed il secondo C positivo, cioè $x^2 - Bx + C = o$; é manifesto, che sarà $sen.\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{C}}{-B}$ negativo, e perciò i due valori di x, $-\frac{\sqrt{C}}{sen.\mathcal{A}}(1 \mp cos.\mathcal{A})$ diventeranno positivi, e per conseguenza anche i valori ultimi..... $-tang.\frac{1}{2}\mathcal{A}\sqrt{C}, -cot.\frac{1}{2}\mathcal{A}\sqrt{C}$ da essi derivati diventeranno $+tang.\frac{1}{2}\mathcal{A}\sqrt{C}, +cot.\frac{1}{2}\mathcal{A}\sqrt{C}$.

III. Sia in terzo luogo l'equazione ..... $x^2 - Bx - C = o$. Si avrà ..... $x = \frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 + C} = \frac{1}{2}B\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C}{B^2}}\right)$, si faccia $\sqrt{1 + tang.^2\mathcal{A}}\left(= \frac{1}{cos.\mathcal{A}}\right)$ ..... $= \sqrt{1 + \frac{4C}{B^2}}$; si avrà $tang.\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{C}}{B}$. Si ponga ne' due valori di x in vece di $\frac{1}{2}B$, ... $\frac{cos.\mathcal{A}\sqrt{C}}{sen.\mathcal{A}}$, ed in vece di $\sqrt{1 + \frac{4C}{B^2}}$ si met-

metta $\frac{1}{\cos. A}$, e si avrà $x = -\frac{\cos. A \sqrt{C}}{\text{sen. } A}$

$\left(1 - \frac{1}{\cos. A}\right) = \frac{\cos. A \sqrt{C}}{\text{sen. } A}\left(\frac{1 - \cos. A}{\cos. A}\right) =$ ....

$\left(\frac{1 - \cos. A}{\text{sen. } A}\right)\sqrt{C}$, e mettendo il valore di .....

$1 - \cos. A = \pm \text{tang.} \frac{1}{2} A \sqrt{C}$; dove si deve prendere il segno inferiore, perchè essendo B negativo, si ha $\text{tang.} \frac{1}{2} A = \frac{2\sqrt{C}}{-B}$; L'altro valore di

x è $-\frac{\cos. A \sqrt{C}}{\text{sen } A}\left(1 + \frac{1}{\cos. A}\right)$ .....

$-\frac{\cos. A \sqrt{C}}{\text{sen. } A}\left(\frac{1 + \cos. A}{\cos. A}\right)$ .....

$= -\left(\frac{1 + \cos. A}{\cos. A}\right)\sqrt{C}$, e sostituendo il valore di $1 + \cos. A = \pm \cot. A \sqrt{C}$, dove si dee prendere il segno + perchè essendo B negativo, e perciò tale anche $\text{tang. } A$, dee risultar negativa ancora la $\cot. = \frac{1}{\text{tang.}}$.

IV. E' facile adesso a vedersi, in virtù del raziocinio usato, che essendo l'equazione..... $x^2 +$

$x^2+Bx-C=0$ altra mutazione non deve succedere nei valori di x, che la mutazione dei segni, e perciò deve aversi $x=tang.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, $x=-cot.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$. E' chiaro che trovato l'arco A per mezzo dell'equazione $tang.\ A=\frac{2\sqrt{C}}{\pm B}$, si trovano facilmente i valori di x.

Si concluda pertanto, che l'equazione..... $x^2\pm Bx-C=0$ dà $x=\pm tang.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, e per secondo valore $x=\mp cot.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, essendo..... $tang.\ A=\frac{2\sqrt{C}}{\pm B}$; e che l'equazione $x^2\pm B+C=0$ dà per primo valore $x=\mp tang.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, e per secondo valore $x=\mp cot.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, essendo..... $sen.\ A=\frac{2\sqrt{C}}{\pm B}$

1151. Questo Metodo si può adesso comprender facilmente, non esser altro che un artifizio inutile, idoneo solamente ad accrescere la difficoltà del calcolo piuttosto che agevolarla. Esso infatti è primieramente soggetto ad una doppia approssimazione, difetto non perdonabile in tutti i casi

nei quali $\frac{1}{4}B^2 \pm C$ sia un quadrato; e difetto grande ancora nei casi in cui ciò non avvenga, perchè $\sqrt{\frac{1}{4}B^2+C}$ si ottiene con una sola approssimazione, mentre i valori di ..... $\pm tang.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, e $\pm cot.\frac{1}{2}A\sqrt{C}$, eccettuato il caso in cui sia C un quadrato, non si possono ottenere, che molticando il valore prossimo di .... $tang.\frac{1}{2}A$, ò $cot.\frac{1}{2}A$ nel valor prossimo di $\sqrt{C}$.

In secondo luogo il suddetto metodo richiede un calcolo più operoso assai di quello del metodo ordinario, calcolo, il quale, non essendo possibile aver sempre a mano le formole, non può assolutamente evitarsi.

1152. *Scol.* Niente meno inutili sono gli artifizj immaginati dal Sig. Conte Fagnani (*ved. Calogero Tom.* 12.). Eccoli in compendio.

I. *Artif.* Sia l'equazione x^2+ax+b^2; sarà $x^2+b^2 = -ax$: e moltiplicando per $\frac{2b}{a(x^2+b^2)}$ ..... $\frac{2b}{a} = -\frac{2bx}{x^2+b^2}$, e quadrando, e trasponendo..... $-\frac{4b^2}{a^2} = -\frac{4b^2x^2}{(x^2+b^2)^2}$; quindi aggiungendo l'unità

tà ad ambedue i membri $1-\frac{4b^2}{a^2}=$ ..... $\frac{x^4-2b^2x^2+b^4}{x^4+2b^2x^2+b^4}$; ed estraendo la radice quadra

$\sqrt{1-\frac{4b^2}{a^n}}=\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}$: Di qui $x^2=$ ..... $b^2\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4b^2}{a^2}}\right):\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4b^2}{a^2}}\right)$,

e finalmente $x=b\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4b^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}:$ ..... $\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4b^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ formola estremamente.... compl icata.

II. *Secondo Artif.* A ciascun membro dell'equazione $x^2+bb=-ax$ si aggiunga $2bx$, onde sia.... $x^2+2bx+b^2=2bx-ax$; quest' equazione si divida per $(x^2+2bx+b^2)(-a+2b)$, e si avrá..... $\frac{1}{-a+2b}=\frac{x}{x^2+2bx+b^2}$, e moltiplicando per $-4b$ $\frac{-4b}{-a+2b}=\frac{-4bx}{x^2+2bx+b^2}$ ed aggiungendo l'unità come sopra $\frac{-a-2b}{-a+2b}=\frac{x^2-2bx+b^2}{x^2+2bx+b^2}$, ed estraendo la radice

dice quadra $\sqrt{\left(\frac{-a-2b}{-a+2b}\right)} = \frac{x-b}{x+b}$, ed in fine sviluppando x, e moltiplicando per maggior eleganza il numeratore, e il denominatore di esso per $\sqrt{-a+2b}$, si ottiene .....

$x = b\left(\pm\sqrt{-a+2b} \pm \sqrt{-a-2b}\right) : .....$

$\left(\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-1b}\right)$ formola niente meno complicata di quella trovata col primo artifizio. Oltre di questo vi è ancora il difetto, che l'omogeneo debba essere un quadrato, altrimenti le due formole di x trovate, affette sarebbero da un altro radicale, il che ne accrescerebbe a dismisura la complicatezza. Ma è tempo di passare all'applicazione degli addotti metodi. Sia pertanto.

1153. *Probl.* I. Dati due lumi, dei quali sia la luce come m, ed n, e la distanza sia $=a$, determinare in qual punto della loro distanza sia eguale l'intensità della luce.

Soluzione. Sia x la distanza del lume minore n, dal punto cercato; la distanza dell' altro lume dal medesimo punto sarà $a-x$. Ora l'intensità della luce in diverse distanze dal corpo luminoso sta in ragione inversa duplicata delle distanze medesime: dunque dovrà esser $\frac{n}{x^2} = \frac{m}{(a-x)^2}$, cioè $x^2 + \frac{2anx}{m-n} = \frac{a^2n}{m-n}$, e compiendo il quadrato, ed

estra-

estraendo la radice $x = -\frac{an}{m-n} \pm a\sqrt{\frac{nm}{m-n}}$, formola la quale comprende tutti i casi possibili; solamente nel caso di $m=n$ non può ella esser di alcun uso, a motivo del risultato infinito che presenta: In questo caso però, basta osservare che nell' equazione $(m-n)x^2 + 2anx = a^2n$ svanisce il primo termine, onde si ha $2anx = a^2n$, cioè $x = \frac{a}{2}$ come dev' essere.

1154. *Probl.* II. Data una quantità di aria dentro il barometro, si domanda l' altezza, a cui deve star sospeso il mercurio.

Soluzione. Sia d la quantità di aria data, b sia l'altezza del barometro, a sia la pressione di una colonna d' aria, alta quanto l' ammosfera, ed equivalente al peso di una colonna di mercurio alta 28 pollici. Se x sia l' altezza richiesta del mercurio, $b-x$ sarà lo spazio nel quale si conterrà dentro il barometro l' aria cercata. Ma gli spazj, in cui l' aria si dilata, sono in ragione reciproca delle forze che la comprimono, purchè queste forze sieno dentro certi limiti; dunque si deve avere la proporzione $\ldots a : a-x :: b-x : d$, cioè la pressione di un' intera colonna d' aria sta alla pressione che agisce sull'aria contenuta nel barometro, come lo spazio nel quale si riduce la sudett'aria contenuta nel barometro, allo spazio nel quale stà diffusa l'aria data d presso la superficie della terra per la pressione di tutta la colonna ammosferica, che le sovrasta; deducendo l'equazione si ha .....

x^2-

$x^2 - (b + a)x = a(d - b)$ ed x .....

$$= \frac{b+a}{2} \pm \sqrt{a(d-b) + \frac{(b+a)^2}{4}}$$

1155. Si possono scioglier per esercizio i problemi che seguono.

Probl. 1. Data la somma di due quantità, e quella dei loro cubi, trovar queste quantità.

Probl. 2. Dato il prodotto, e la differenza di due quantità, trovarle ambedue.

Probl. 3. Trovar due quantità tali, che la loro somma sia uguale al lor prodotto, ed alla differenza dei loro quadrati.

Probl. 4. Trovar tre quantità, di cui la somma sia $=a$, la somma dei quadrati di ciascuna sia $=b^2$, e la somma di tutti i rettangoli sia $=c^2$.

1156. Per compimento di questa sezione, cade in acconcio, dare la dimostrazione diretta del *Teor.* dimostrato per induzione al (*n.* 1026.): Che un' equazione deve aver tante radici positive, quante alternazioni di segno vi sono nei suoi termini; e tante radici negative, quante in essi vi sono consecuzioni, e viceversa. A quest' oggetto sia

LEMMA I.

Data un' equazione qualunque, che abbia tutte le radici reali, se in essa prendansi tre termini contigui, dei quali gli estremi abbiano il medesimo segno, il quadrato del coefficiente del termine medio, è sempre maggiore del rettangolo dei coefficienti dei due termini estremi.

Di-

Dimostrazione. Sia l' equazione ..... $x^n + px^{n-1} \pm qx^{n-3} + rx^{n-3} \pm sx^{n-4} + \&c. = 0$. Questa si moltiplichi per una progressione arimmetica, che abbia zero per primo, ed ultimo termine alternativamente, finchè l'equazione principale si riduca à soli tre termini, per es.° ai tre termini ..... $p'x^{n-1} \pm q'x^{n-2} + r'x^{n-3} = 0$. Quest' equazione avrà tutte le radici reali (*n.* 1089.). Dividendo per $p'x^{n-3}$ e sciogliendo l'equazione si ha..... $x = \mp \frac{q'}{2p'} \pm \sqrt{-\frac{r}{p'} + \left(\frac{q'}{2p'}\right)^2}$. Ma affinchè queste due radici sieno reali, si richiede che sia $\frac{(q')^2}{(2p')^2} > \frac{r'}{p'}$, cioè $q^2 > 4p'r'$, e per una ragione più forte $q'^2 > p'r'$; dunque la dimostrazione è generale, perchè i coefficienti p, q, r, &c. possono esser qualunque, come pure qualunque può essèr la progressione arimmetica moltiplicante.

LEMMA II.

Essendo $Kp' > q'$ deve essere ancora $Kq' > r'$.

Dimostrazione. Essendo per il lemma antecedente $q'^2 > p'r'$ dev' esser $Kq^2 > Kp'r'$, e dividendo per $q'r'$, $\frac{Kq'}{r'} > \frac{Kp'}{q'}$; pongasi $Kp' > q'$, o sia $\frac{Kp'}{q'} > 1$, e sarà molto più $\frac{Kq'}{r'} > 1$, cioè $Kq' > r'$, come &c.

Venghiamo adesso alla dimostrazione del Teorema proposto.

I. Sai

I. Sia proposta l' equazione a radici m reali $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$ &c. $+ Mx^{m-n} + Nx^{m-n-1}$..... $\pm Ox^{m-n-2}$ &c. $+ Px + Q = 0$, e questa si debba moltiplicare per il fattor reale $x + K$

Caso 1.° Sieno i segni tutti consecutivi. In questo caso è manifesto che i segni dopo la moltiplicazione per $x + K$, debbono rimaner tutti consecutivi, e che perciò nell'equazione risultante deesi avere una consecuzione di più.

Caso 2.° Tutti i termini dell' equazione data sieno dotati di segno alternativo, onde abbiasi l' equazione $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4}$..... $\pm Px + Q = 0$

Questa essendo moltiplicata per $x + K$ diviene

$x^{m+1} - Ax^m + Bx^{m-1} - Cx^{m-2} +$ .... $\pm Qx + KQ$

$+ Kx^m - KAx^{m-1} + KBx^{m-2}$ .... $\pm KPx = 0$

In questa se nessun coefficiente dei termini omogenei sottoposti suppongasi maggiore del coefficiente sovrapposto, rimarranno nell' equazione trasformata m alternazioni, e si avrà di più una consecuzione negli ultimi due termini. Se poi uno dei coefficienti accennati sia maggiore del coefficiente sovraposto, per es.° se sia $K > A$, sarà perciò..... $KA > B$, $KB > C$, $KC > D$ &c $KP > Q$ (Lemma II): Si avrà per conseguenza una consecuzione nei primi due termini, persistendo tutti alternativi i seguenti.

Lo stesso vale se KA sia $> B$, e non $K > A$, e così in seguito.

Caso 3.° Qualora finalmente sieno miste le alternazioni, e le consecuzioni, si dispongano i termini in modo, che le alternazioni procedano tutte di seguito, e che di seguito ne succedano le consecu-

secuzioni ; l'equazione essendo allora della forma $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3}$ &c. $+ Px^{m-n} + Qx^{m-n-1}$ &c. $= 0$ fatta la moltiplicazione per $x+K$ diviene .....

$x^{m+1} - Ax^m + Bx^{m-1} - Cx^{m-2}$ &c. $+ Px^{m-n+1} + Qx^{m-n}$ &c. $= 0$

$+K \quad -KA \quad +KB$ &c. $\pm KO \quad +K\Pi$ &c.

In questa trasformata è manifesto che se nessuno dei coefficienti dei termini omologi inferiori, corrispondenti alle alternazioni, si supponga maggiore del cofficiente superiore, le alternazioni dovranno rimanere le medesime, e che si acquisterà una consecuzione di più per cagione dei termini di segno consecutivo, appunto come si vide dover avvenire nel 1°. caso.

Sia dunque uno dei coefficienti inferiori maggiore del coefficiente superiore che gli corrisponde, e sia per es°. $K > A$; KA sarà $> B$, $KB > C$ &c. cosicchè si acquisterà una consecuzione nei primi due termini, rimanendo alternativi tutti i susseguenti fino al 2°. dei termini affetti da segno consecutivo. Ecco dunque che se si moltiplichi un' equazione qualunque per un fattore $x+K$., la risultante deve acquistare una consecuzione di più nei segni.

II. Ma qual sarà la mutazione dei segni, se facciasi la moltiplicazione per $x-K$? E' facile a vedersi che tutta la mutazione dovrà consistere in una variazione di più. Difatto, basta osservare, che mutando i segni nei siti pari dell' equazione proposta, e di poi facendo la moltiplicazione per $x+K$, la risultante deve avere, per la dimostrazione addotta una consecuzione di più di quelle, che aveva innanzi alla moltiplicazione. Si mutino dunque i segni di nuovo nei siti pari ; ad oggetto

getto di restituire la primiera qualità alle radici, e si avrà una variazione di più di quelle, che si avevano nella proposta: perchè se in un' equazione il numero delle consecuzioni stia a quello delle variazioni :: m : n, mutati i segni nei siti pari, deve stare il primo numero al secondo :: n ; m

III. Posto questo, siccome un' equazione qualunque altro non è che un prodotto di fattori della forma $x \pm K = o$ (*n.* 1008.); poichè ciascun fattore composto di radice negativa, come $x + K = o$ produce una consecuzione, e ciascun fattore di radice positiva, come $x - K = o$ produce una variazione, si può concludere generalmente, che un' equazione, le di cui radici tutte sieno reali, deve avere tante consecuzioni nei segni de' suoi termini, quante ha radici negative, e tante variazioni di segno, quante ha radici positive e viceversa; e questo è ciò, che si doveva dimostrare.

SEZIONE. III.

Della Soluzione dell' equazioni di 3°. grado,

1157. L' equazioni di terzo grado, essendo ridotte come si conviene, e prive del secondo termine, si riducono generalmente alla forma ..... $x^3 \pm px \pm q = o$

1158. Il primo che abbia data la soluzione di questa sorta di equazioni, vien comunemente riputato, sull' asserzione del Cardano, Scipione Ferri di lui scolare; sanno però i più accorti essere stato il Tartaglia. Esso espose la formola di

di una tal soluzione, senza additare il metodo con cui l'aveva ottenuta. Sembra che un tal metodo, come lo asserisce anche M. de la Grange (*Atti dell' Acc. di Berl.* 1770), debba essere stato quello, che venne adoperato da M. Hudd. Questo è il seguente.

Met. I. Essendo proposta l'equazione ..... $x \pm px \pm q = 0$, si ponga $x = y + z$. Sarà ..... $x^3 = y^3 + 3yz^2 + 3y^2z + z^3 = y^3 + 3yz(y+z) + z^3$ ..... $= y^3 + 3yzx + z^3$, e perciò $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$. Quest' equazione è della medesima forma che l'equazione proposta, ed inoltre è ad essa identicamente uguale, a motivo della supposizione di..... $x = y + z$. Si può dunque fare il paragone de' coefficienti, e si ha $-3yz = \pm p$, cioè $yz = \mp \frac{p}{3}$, $y^3 + z^3 = \mp q$, di dove moltiplicando per y^3, si deduce..... $y^6 + z^3y^3 = \mp qy^3$; ma $y^3z^3 = \mp \frac{p^3}{27}$, dunque ..... $y^6 \pm qy^3 \mp \frac{p^3}{27} = 0$, equazione derivativa di secondo grado, dalla quale si ha ..... $y^3 = \mp \frac{q}{2} \pm \sqrt{\pm \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$, ed ..... $y = \sqrt[3]{\left(\mp \frac{q}{2} \pm \sqrt{\pm \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \right)}$ ..... e $z^3 = \mp q - y^3 = \mp \frac{q}{2} \mp \sqrt{\pm \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$, e perciò.....

$z =$

$x=\sqrt[3]{\left(\pm\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)}$, e finalmente .....

$$x=y+z=\sqrt[3]{\left(\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp\sqrt[3]{\left(\pm\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)}$$

1159. Questa formola ad oggetto di adoperarla con meno incomodo giova ridurla ad una forma più semplice. Questa riduzione. Si può effettuar facilmente con fare il coefficiente del 3°. termine $= 3p$, e l'omogeneo $= 2q$ Con questo infatti essa diviene della forma .....

$$\sqrt[3]{\pm q+\sqrt{q^2\pm p^3}}+\sqrt[3]{\mp q-\sqrt{q^2\pm p^3}}$$

Di questa noi faremo uso nella pratica.

1160. Il principio fondamentale di questa soluzione consiste in questo, che sostituito $y+z$ in luogo di x nell' equazione proposta, di tutte le combinazioni, colle quali l' equazione risultante $y^3+3y^2z+3z^2y+z^3\pm py\pm pz\pm qy\pm q=0$ si può dividere in due equazioni, per fissare il valore dell' indeterminate y, z, si debba scegliere la combinazione, per cui si hanno l' equazioni ..... $3y^2z+3yz^2\pm py\pm pz=0, z^3+y^3\pm q=0$. Infatti la prima di queste si riduce alla forma .....

$3zy(y+z)=\pm p(y+z)$ che dà $yz=\pm\frac{p}{3}$ come appunto si è trovato nel paragonare i coefficienti del terzo termine; e la seconda è la stes-

sa equazione trovata con paragonare gli omogenei di comparazione, Si sceglie questa combinazione in preferenza delle altre, perchè somministra un' equazione di secondo grado, dà cui si hanno i valori di z, ed y, e con ciò quelli di x il che non avviene se scelgasi un' altra delle possibili combinazioni, con le quali si può dividere in due equazioni la trasformata suddetta. Dalla soluzione addotta deriva un altro Metodo più semplice, ed è il seguente.

Met. II. Poichè si è veduto dover essere $yz=\pm\frac{p}{3}$, o sia $z=\pm\frac{p}{3y}$, pongasi $x=y\mp\frac{p}{3y}$; si sostituisca, e si avrà la trasformata che segue

$$\left.\begin{array}{l} y^3\mp py+\frac{p^2}{3y}\mp\frac{p^3}{27y} \\ \pm py\mp\frac{p^2}{3y}\pm q \end{array}\right\} = y^6\pm qy^3\mp\frac{p^3}{27}=0 \quad \text{d' onde si ha .....}$$

$$y^3=\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\text{, ed}$$

$$y=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} \quad \text{e finalmente .....}$$

$$x=y\mp\frac{p}{3y}=\sqrt{\left(\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)} \quad .....$$

$$\mp \frac{p}{3\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \sqrt[3]{\left(\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\sqrt[3]{\left(\mp\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right)}.$$

1161. Questa è la formola detta volgarmente di Cardano; essa è manifesto che presenta una sola radice dell' equazione cubica. Per ottenere le altre due radici, si divida l' equazione ipotetica $x^3-3yzx-y^3-z^3=0$ per il suo fattore $x-y-z=0$, e si avrà: $x^2+(y+z)x+y^2+z^2-yz=0$ dalla quale si ha $x=\pm\frac{1}{2}(y-z)\sqrt{-3}-\frac{1}{2}(y+z)$, valori che danno le altre due radici richieste. Facciasi infatti la sostituzione dei valori di y, e di z, e le suddette espressioni diverranno .....

$$x=\left(\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}\right)\times\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$+\left(\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^2}{27}+\frac{q^2}{4}}}\right)\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$$

Nella pratica, dopo aver trovata una radice m, basta dividere l' equazione proposta per $x\pm m$;

nel

nel risultato sostituire il valor di m, e quindi estrarre i due valori dell' equazione quadratica.

Met. III. Si tolga col Metodo di Eliminazione di M. Tschirnaus esposto al *n.* 1081. il secondo, ed il terzo termine dell' equazione cubica proposta, con porre $x^3 = bx + a + y$. Fatta la sostituzione si ha la trasformata esposta al num. sud.°, ... $y^3 \pm Ay^2 \pm By \pm C = 0$. In questa si facciano $A = 0$, e $B = 0$, e da queste due equazioni si deducano i valori di a, e di b. Così l' equazione in y vien ridotta alla forma $y^3 \pm C = 0$, la quale dà subito le radici $\sqrt[3]{\pm C}$, $\alpha\sqrt[3]{\pm C}$, $\alpha^{II}\sqrt[3]{\pm C}$, essendo 1, α, ed α^{II} le radici cubiche di 1, o sia dell' equazione pura $z^3 - 1 = 0$.

Fatto questo, pongansi nel valor di ..... $x = -\frac{(a+m)(b+y)-p}{a^2+y+ma+n+b}$ i valori di a, e di b, ed i tre valori di y, e si avranno immediatamente le tre radici dell' equazione, ovvero si divida la proposta per $x \pm$ il suo valore ottenuto con sostituire nella suddetta espressione di x i valori di a, e b, ed il valor reale di y, e dalla risultante di secondo grado, si avranno l' altre due radici richieste.

1162. Sostituendo i valori di a, b, ed y, nell' equazione ipotetica $x^2 - bx - a - y = 0$, si possono dedurre anche da questa le radici dell' equazione. Si avverta però coll' immortale M. de la Grange, che non si dee prendere indifferentemente, come fa Tschirnaus una radice qualunque di essa, perchè si richiederebbe che detta equazione ipotetica contenesse due radici co-

muni colla proposta, e perciò, che b fosse la somma di due radici; ora siccome non può esser b la somma di due radici piuttosto che di due altre delle tre radici dell' equazione data, converrebbe che b avesse tre valori, mentre non ne può aver che due: bisogna dunque prendere quella radice dell' equazione ipotetica, che è comune colla proposta, o sia, bisogna trovare il comun divisore di tali equazioni; esso sarà il valor di x, e sarà il medesimo che quello espresso dalla formola.

$x=\frac{-(a+m)(b+y)-p}{a^2+y+ma+n+b}$, e sarà triplice per il triplice valore di y.

1163. *Teor.* Qualora un' equazione cubica abbia tutte le radici reali, la formola Cardanica dee comparire immaginaria, e viceversa, qualora un' equazione cubica abbia due radici immaginarie, essa dee comparire sotto forma reale.

LEMMA I.

Dovendo esser le radici tutte reali, e prese insieme uguali a zero, si possono mettere sotto la forma $-a+b$, $-a-b$, $\pm 2a$; posto questo io dico dover esser generalmente $a^2<-\frac{1}{3}p$, e $2a^3>2q$

Di fatto la somma dei prodotti a due delle suddette radici è $=-3a^2-b^2$; ..... perciò $p=-3a^2-b^2$, o sia $3a^2+b^2=-p$, e per conseguenza $3a^2<-p$, $a^2<-\frac{1}{3}p$.

Nel

Nel modo stesso essendo il prodotto di tutte le tre radici $= 2a(a^2-b^2)$, deve aversi ..... $q=2a(a^2-b^2)=2a^3+2ab^2$ cioè per essere ..... $a^2-b^2<a^2$, $q<2a^3$, e $2a^3>q$.

LEMMA II.

Se due radici di un' equazione cubica priva di 2.° termine sieno immaginarie, si potranno mettere sotto la forma $-a+\sqrt{-b}$, $-a-\sqrt{-b}+2a$; Ciò posto dico dover esser sempre $-\frac{1}{3}p<2a^2$, $4q>2a^3$. Di fatto si ha $p=3a^2-b$, cioè $-\frac{1}{3}p=+a^2-b$, e perciò $-\frac{1}{3}p<a^2$. Così avendosi ..... $q=2a(a^2+b)=2a^3+2ab$, risulta $q>2a^3$. Sia adesso:

Dimostraz. della 1.ª parte. Essendo (*Lem.*I.) $4a^2<-\frac{4}{3}p$ sarà $a^2<-\frac{1}{3}p$ ed essendo $2a^3>q$, si avrà..... $a^3>\frac{1}{2}q$; cubando il primo rapporto, e quadrando il secondo si deduce $a^6<-\frac{1}{27}p^3$, ... ed $a^6>\frac{1}{4}q^2$, e perciò $-\frac{1}{27}p^3>\frac{1}{4}q^2$; ma nel caso che le radici dell'equazione sieno tutte reali il coefficiente p dev' esser negativo (*n.* 1035.); dunque ... $\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$ dee risultare immaginaria, e

perciò tale dee risultare tutta la formola Cardanica.

Dimostrazione della seconda parte. Qualora due delle radici sieno immaginarie, ancorchè sia p negativo, in virtù del 2.° Lemma deve risultar sempre ..... $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, e perciò la formola Cardanica deve esser sempre reale.

Dimostrazione II. Sieno $-a+\sqrt{\pm c}$, $-a-\sqrt{\pm c}$, $2a$ le radici di un' equazione cubica qualunque, e facendo il prodotto dei fattori $x+a-\sqrt{\pm c}$, ... $x+a+\sqrt{\pm c}, x-2a$, si avrà l'equazione ..... $x^3-3a^2x-2a^3=0$. Si paragoni quest' equazione $-3cx+6ac$ colla generale $x^3 \pm px \pm q=0$, e si avrà $\pm p=-3a^2-3c$, $\pm q=-2a^3+6ac$. Dalla 1.ª si ha $\pm\frac{1}{3}p=-a^2-c$, e cubando si ottiene ..... $\pm\frac{1}{27}p^3=-a^6-3a^4c-3a^2c^2-c^3$. Dalla 2.ª si ha..... $\pm\frac{1}{2}q=-a^3+3ac$, e quadrando ..... $\frac{1}{4}q^2=a^6-6a^4c+9a^2c^2$, e sommando queste due ultime equazioni, si ha $\pm\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2=-9a^4c+6a^2c^2-c^3=-c(3a^2-c)^2$, valore sempre negativo, essendo c positivo, vale a dire essendo le radici reali; e sempre positivo essendo c negativo, cioè essendo le radici immaginarie, a motivo di $(3a^2-c)^2$, sempre positivo.

1164. *Scol.* L' immaginarietà divisata non impe-

disce però, che si possano ottener le radici dell' equazione proposta, qualora esse sieno reali, e razionali. Di fatto in questo caso dalla quantità ....

$\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$ si può sempre estrarre la radice cubica esattamente; e perciò supponendo.....

$\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=m+\sqrt{-n}$, e per conseguenza $\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=m-\sqrt{-n}$, si ottiene $x=\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{2}}}$.....

$+\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=m\pm\sqrt{-n}+m\mp\sqrt{-n}$

$=2m$ valor sempre reale, da cui si ha il fattore $x-2m=0$, per il quale dividendo l' equazione proposta, si ottiene una risultante di 2.° grado, che somministra le altre due radici.

1165. Dissi qualora sieno le radici reali, e razionali, perchè essendo esse reali irrazionali, non riesce estraibile la radice cubica dalla quantità $\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$, e con ciò l'immaginarietà non si può elidere.

Questo è il caso propriamente detto *irriduci-*

bile

bile, perchè ad onta delle più serie meditazioni, e de' più laboriosi artifizj, non si è potuta ridurre la formola alla razionalità; ò per dir meglio, perchè ella esclude intrinsecamente questa riduzione, come siamo per dimostrare.

1166. *Teor.* La formola Cardanica nel caso irriducibile non può ricevere altra forma algebraica finita, che la propria sotto aspetto immaginario. *Dimostrazione*.

LEMMA.

Avendosi un' equazione cubica la quale abbia le radici tutte reali, e diseguali, ed essendo per conseguenza della forma $x^3 - px \pm q = 0$ (*n.*1035) deve essere generalmente .....

$$x < \sqrt{\frac{4}{3}p} < 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Dimostrazione. Sieno $\pm a$, $\mp b$; $\mp c$ le tre radici, e dovendo mancare il 2.° termine, sia..... $a = b + c$; si avrà ..... $(x \mp a)(x \pm b)(x \pm c) = x^3 - (ab + ac - bc)x \mp abc = 0$, e sostituendo il valore di a, $x^3 - (b^2 + bc + c^2)x \mp bc(b + c) = 0$. Ora $2bc < b^2 + c^2$, perchè un quadrato è sempre positivo, e $3bc < b^2 + c^2 + bc$; perciò $bc < \frac{1}{3}(b^2 + c^2 + bc)$. Aggiungasi ad ambe le parti $b^2 + bc + c^2$, e si avrà $b^2 + 2bc + c^2 < \frac{4}{3}(b^2 + bc + c^2)$.

Onde $b + c < \pm\sqrt{\frac{4}{3}(b^2 + bc + c^2)}$;

Ma

Ma $\sqrt{\frac{4}{3}(b^2+bc+c^2)} = \sqrt{\frac{4\times 1p}{3}}$; dunque.....

$b+c=a < \sqrt{\frac{4}{3}p} < 2\sqrt{\frac{1}{3}}p$; e per più forte ragione $b<2\sqrt{\frac{1}{3}}p$, e $c<2\sqrt{\frac{1}{3}}p$, onde si può concludere generalmente esser $x<2\sqrt{\frac{1}{3}}p$.

Posto questo eccoci alla dimostrazione del Teor. Se la formola Cardanica può ammettere una forma algebraica finita priva di immaginarietà, ella dovrà essere funzione di p, o di q, o di p, e q insieme; Sia pertanto $=\varphi$, onde abbiasi.....

$$\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\mp\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}\pm\frac{q^2}{2}}}=\varphi$$

Pongasi $\sqrt[3]{\mp q+\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=y$; sarà .....

$$\sqrt[3]{\mp q-\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=\frac{p}{3\sqrt[3]{\mp q+\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}}$$

e perciò $\varphi=y+\frac{p}{3y}$, e di qui $y^2-\varphi y+\frac{p}{3}=0$;

ed $y=\frac{\varphi}{2}\pm\sqrt{\frac{\varphi^2}{4}-\frac{p}{3}}=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{4p}{3}}$. Ma $\varphi=x$, ed x^2 nel caso delle radici tutte reali è .....

$<2\sqrt{\frac{1}{3}}p$, o sia $x^2<\frac{4}{3}p$, dunque $\frac{\varphi}{2}$.....

$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{4p}{3}}$ è necessariamente immaginaria, e perciò immaginaria è pure necessariamente la formola Cardanica $=y+\frac{p}{3y}$

Ma inoltriamo la dimostrazione ad un maggior grado di evidenza.

Essendo $y=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{4p}{3}}$, si vede che la funzione φ deve essere tale, che $\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{4p}{3}}$ sia la radice cubica di $\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$, Ma perchè questo abbia luogo, si richiede che sia φ divisore razionale esatto di $\frac{1}{2}q$. Dev' essere divisore esatto, perchè la parte razionale del cubo di $\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{4p}{3}}$ è $=\left(\frac{1}{8}\varphi^2\pm\frac{3}{8}(\varphi^2-\frac{4}{3}p)\right)\varphi$, e questa dev' essere $=\mp\frac{1}{2}q$; e dev' esser razionale, perchè q essendo razionale, non può ammettere verun divisore esatto, il quale non sia razionale. Dunque la formola Cardanica ammetterà la forma

ma φ, qualora φ possa esser parte aliquota di q; ma cubando, e riducendo l'equazione .....

$$\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}-\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=\varphi$$

si ottiene, come può vedersi facilmente ..... $\varphi^3 - p\varphi \pm q = 0$ .....(P); dunque affinchè la formola Cardanica ammetta la forma φ si richiede che φ sia divisore razionale di q, e radice di (P); Ora l'equazione (P) è precisamente l'equazione $x^3 - px \pm q = 0$, la quale per ipotesi ha tutte le radici irrazionali. Dunque il di lei omogeneo q non ammette alcun divisor razionale; dunque $\frac{\varphi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2 - \frac{4p}{3}}$ non.... può esser radice cubica di $\mp\frac{q}{2} \pm \sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$.... e per conseguenza la formola Cardanica non è suscettibile di veruna forma reale φ.

1167. Dico adesso che neppure nel caso, che le radici sieno tutte razionali, si può trovare una formola φ esprimente le tre radici sotto forma reale. Di fatto si sà in virtù del Teor. 1031. che da un' equazione affetta da un numero di radici reali >3, non si può dedurre una formola reale, che rappresenti ciascuna di tali radici. Dunque neppure in questo caso &c.

1168. Avendo adesso veduto, che la formola Cardanica comparisce immaginaria quando le radici sono reali, e viceversa; ed avendo veduto, che

che nel caso irriducibile una tal forma immaginaria non può in verun modo cangiarsi in forma reale, rimane ad investigarsi il principio da cui questo fenomeno Analitico ne deriva. A quest' effetto io risalgo a considerare il metodo col quale si è ottenuta la formola Cardanica, ed osservo, che esso equivale in ultima Analisi, al seguente problema: Data una quantità x, si domanda come si debba dividere in due parti y, z, in modo che ne risulti $y^6 \pm qy^3 + \frac{p^3}{27} = 0$. Ora questo problema riesce impossibile ogni volta che sia $\frac{p^3}{27}$ negativo, e $> \frac{1}{4}q^2$ (*n.* 1156); Ma nel caso in cui tutte le radici sieno reali, si ha sempre per negativo (*n.* 1045), $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ (*numer.* 1163. *Lem. II.*). Dunque il Metodo per cui si ottiene la formola Cardanica, esso è che nel caso delle radici reali, involge contradizione, e perciò non è meraviglia, che sebbene il problema che ha prodotta l'equazione cubica, sia possibile, ci venga per x una formola immaginaria.

1169. Ma per vederne una dimostrazione anche più concludente, suppongasi che l'equazione $x = y + \frac{p}{3y}$ rappresenti una curva, in cui sieno x le ordinate, ed y le ascisse; Si avrà differenziando,.... $dx = dy - \frac{p\,dy}{3y^2}$, e posto dy costante, ... $d^2x = \frac{2p\,dy^2}{3y^3}$. Essendo dunque positivo il secon-

do differenziale dell' ordinata x, sarà essa un minimo, quando $dy - \frac{p\,dy}{3y^2} = o$, cioè quando ...., ... $y = \sqrt{\frac{p}{3}}$, ed il suo minimo valore sarà $\sqrt{\frac{4p}{3}}$; e perciò x^2 non può esser $< \frac{4}{3}p$, cioè, dette ..... ± 1, $\pm 1 \pm b$, $\mp 2 \mp b$ le radici non può esser minore di $4 + 4b + \frac{4}{3}b^2$; ma il massimo valore di x^2 è $4 + 4b + b^2 < 4 + 4b + \frac{4}{3}b^2$; dunque l'equazione $dy - \frac{p\,dy}{3y^2} = o$, o sia $x = y + \frac{p}{3y}$, nel caso che le radici sieno tutte reali, diseguali, involge un' ipotesi contraddittoria, e perciò il Metodo &c. E' dunque a torto accusato dal Sig. D. Tommassini T. 2. *p.* 591. il dotto Algebrista Koenig, perchè osservando il valor di $y = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - \frac{4p}{3}}$, dedotto dall' equazione ipotetica $x = y + \frac{p}{3y}$, asserisce, che qualora si ha $x^2 < \frac{4}{3}p$ .... (cosa che succede sempre quando le radici sono tutte reali *n.* 1176) il Metodo Cardanico involge un' ipotesi impossibile. Nè giova adurre per ragione, com' egli fa, che essendo la somma $y + \frac{p}{3y} = y + z$, per l'elisione dei termini immaginari, una quantità reale, non vi ha impossibilità d' ipotesi; poichè primieramente

la realità della somma $y+\frac{p}{3y}$ ha luogo soltanto, quando le radici sono razionali; e secondariamente una tal realità mostra solamente, che il problema è possibile, non già, che il Metodo impiegato non involga contradizione.

1170 Con molto meno di ragione il citato Autore, taccia un altro illustre Matematico di errore, perchè dimostra la contradizione contenuta nel Metodo Cardanico, col seguente raziocinio. Essendo le radici tutte reali, e diseguali, e mancando nell'equazione ridotta il secondo termine, possono ridursi le radici alla forma ..... $\mp a \mp b, \mp a \pm b, 2a$. Ora da queste si ha (come si è veduto di sopra *Lem. I.*) l'equazione ..... $x^3-(3a^2+b^2)x \pm 2a^3 \mp 2ab^2=0$. Paragonando questa coll'equazione generale proposta ..... $\alpha^3-px \pm q=0$, si ha $p=3a^2+b^2$, cioe $a^2=\frac{p}{3}-\frac{b^2}{3}$ e perciò $a^2<\frac{p}{3}$; ma si ha $yz=\frac{p}{3}$; dunque $a^2<yz$ cioè il quadrato della metà della radice massima $2a$, minore del rettangolo delle sue parti diseguali; il che è assordo. Dunque il Metodo Cardanico, egli conclude, nel caso delle radici tutte reali involge contradizione.

Il Signor Tommasini ricorre all'immaginarietà di y, e di z, e dice, che in quantità di questa sorta non è meraviglia, che il quadrato della metà risulti minore del rettangolo delle parti diseguali, che anzi, egli aggiunge, è questo appunto ciò, che deve avvenire, perchè ..... $\mathcal{A}+B\sqrt{-1}+\mathcal{A}-B\sqrt{-1}=2\mathcal{A}, \left(\frac{2\mathcal{A}}{2}\right)^2$ ..... $=\mathcal{A}^2<(\mathcal{A}+B\sqrt{-1})(\mathcal{A}-B\sqrt{-1})(=\mathcal{A}^2+B^2)$ Ma

Ma è poi giusto, io rispondo, supporre immagina j y, e z, e quindi dedurne come una conseguenza necessaria che debba essere $a^3 < yz$, quasi che l'immaginarietà di y, e z non fosse un risultato di una impossibilità inerente al metodo che l'ha prodotta.

Converrebbe innanzi provare che l'immaginarietà di y, e di z non dimostra veruna contradizione nel metodo, che somministra tali valori (cosa impossibile per il *n.* 1168.), e poi senza commettere una petizione di principio, si potrebbe concludere come fa il Sig. Tommasini.

1171 Rimane adesso a vedersi, se nel caso irriducibile, vi abbia per l'Analista veruna risorsa, onde potere ad onta dell'imaginarietà della formola, ottenere i valori reali che sodisfanno al problema.

1172. Il ripiego più naturale, che si presenta a prima vista, è quello di formare la potenza $\frac{1}{3}$ delle due parti $\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{2}}$, $\pm\frac{q}{2}-\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$ mediante il metodo Newtoniano.

1173 Da tutto il fin qui detto si raccoglie adesso:

1°: Che se un'equazione cubica abbia tutte le radici reali non può somministrare una formola, che le rappresenti, la quale sia priva d'immaginarietà, richiedendosi questo dalla natura dell'equazione (*n.* 1168), e dal metodo che nalla soluzione si adopera,

2°. Che l'immaginarietà della formola non impedisce però, che si possa ottenere ciascuna radice se siano razionali, o che se ne possa ottenere il valor prossimo, se non sieno razionali: valore, che è poi

il

il solo, che tali radici possano avere in termini finiti. Non v'è dunque ragione alcuna di lagnarsi del metodo Cardanico, poichè l'immaginarietá da esso introdotta nella formola è più apparente che reale. Rimane che mostriamo l'applicazione della Teoria alla pratica, il che passiamo ad effettuare immediatamente.

1184. *Probl.* 1.° Si debba trovare un numero tale che se dal suo cubo si tolga il numero stesso preso nove volte, il residuo sia $=-28$.

Soluzione. L'equazione richiesta dal problema è $x^3-9x+28=0$. In questa, poichè $9^3\,(=729)<28^2(=784)$, è certo che l'equazione contiene due radici immaginarie; per ottenere la radice reale, si ponga 3 in luogo di p, e -14 in luogo di q e si avrá

$$x=\sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}}+\sqrt[3]{-14-\sqrt{196-27}}$$
$$=\sqrt[3]{-14+13}+\sqrt[3]{-14-13}=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-27}\ldots$$
$=-1-3=-4$. Dividasi adesso l'equazione principale per $x-4$, e si avrà l'equazione quadratica...
$x^2-4x+7=0$, la quale dà $x=2\pm\sqrt{-3}$, altre... due radici dell'equazione principale.

Queste due seconde radici si sarebbero egualmente ottenute mediante la formola generale (1171), poichè si avrebbe avuto .....

$$-1\times-\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\quad-3\times-\left(\frac{1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)\ldots\ldots$$
$$=2\pm\sqrt{-3}$$

1175. *Problem.* 2°. Uno Sciabecco Algerino avendo veduta in distanza di 18 miglia una barca

ca Napoletana, si mette ad inseguirla. La di lui velocità sta alla velocità della barca, come 2 più il viaggio fatto da essa, fino al punto in cui dev'esser raggiunta dal momento in cui fu scoperta, stà a 63 diviso per il viaggio fatto nel medesimo tempo dallo Sciabecco. Si dimanda il numero delle miglia, che deve far lo sciabecco prima di raggiunger la barca. *Soluzione*. Il viaggio fatto dalla barca sia y; il viaggio fatto dallo sciabecco sarà $y+18$. Quindi la velocità dello sciabecco dev'essere $y+2$, e la velocità della barca dev'essere $=\frac{63}{y+18}$. Posto questo, siccome i due legni fanno viaggio nel medesimo tempo, ed il tempo eguaglia lo spazio diviso per la velocità, si avrà l'equazione..... $\frac{y+18}{y+2}=y:\frac{63}{y+18}$ ..... cioè $y^3+20y^2-27y-1134=0$.

Da questa si tolga il 2° termine, e si avrà..... $z^3-\frac{481}{3}z-\frac{9758}{27}=0$. Facciasi il paragone dei coefficienti di quest'equazione con quelli della formola generale, e servendosi della riduzione (1159) si troverà $p=\frac{481}{9}$, e $q=\frac{9758}{2.27}$ e perciò fatte tutte le sostituzioni si otterrà $y=7=-9=-18$, valori, dei quali il primo sodisfa al problema proposto, e gli altri due sodisfano al problema contrario

Met. 1.° Pongasi $\pm\frac{1}{2}q=\mp a$, e $\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{b^2}{4}}=b$,

e

e si avrà $\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2}\pm\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} = (\mp a+b)^{\frac{1}{3}}$ ...

$$= \mp a^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{3\sqrt[3]{a^2}} - \frac{b^2}{q\sqrt[3]{\mp a^5}} + \frac{5b^3}{81\sqrt[3]{a^8}} \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{-10b^4}{243\sqrt[3]{\mp a^{11}}} + \text{\&c.} \ldots \text{e} \sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}-\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} \ldots$$

$$= (\mp a-b)^{\frac{1}{3}} = \mp a^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{3\sqrt[3]{a^2}} - \frac{b^2}{9\sqrt[3]{\mp a^5}} \ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{5b^3}{81\sqrt[3]{a^8}} - \frac{10b^4}{243\sqrt[3]{\mp a^{11}}} - \text{\&c.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e perciò $\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}+\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+\sqrt[3]{\mp\frac{q}{2}-\sqrt{\pm\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} = \mp 2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2b^2}{9\sqrt[3]{\mp a^5}} \ldots$$

$$-\frac{2.10b^4}{243\sqrt[3]{\mp a^{11}}} \text{ ec.} = 2\sqrt[3]{\mp a}\left(1 \mp \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} \text{ec.}\right)$$

Si avverta adesso che nel caso delle radici tutte reali, ed irrazionali, caso nel quale solamente si ha bisogno di ricorrere alla serie trovata, b dev'essere immaginario, e perciò della forma $b\sqrt{-1}$, e si vedrà che la serie richiesta dev'esser finalmente della forma $2\sqrt[3]{\mp a}\left(1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} + \text{\&c.}\right)$

Met. 2.° Dall' equazione $x^3 - px \pm q = 0$ si deduce $x^3 = px \mp q$, ed estraendo la radice cubica si avrà ..

$$x = \sqrt[3]{px \mp q} = \sqrt[3]{\mp q + p\sqrt[3]{\mp q + p\sqrt[3]{\mp q + p\sqrt[3]{\mp q + p\sqrt[3]{+q +}}}}} \text{ &c.}$$

valore sempre reale.

Met. 3.° Sia proposto a risciogliersi l' equazione $x^3 - 3px \pm q = 0$, nella quale sia $p^3 > q^2$; questa si paragoni coll' equazione della trisezione dell'angolo, già addotta, $x^3 - \frac{3}{4}x^2 x + \frac{1}{4}br^2 = 0$, la quale essendo a l' arco, che ha per seno b, ha le radici $sen.\ \frac{a}{3}$, $sen.\ \frac{(60°. - a)}{3}$, $sen.\ \frac{(60.° + a)}{3}$. Fatto il paragone si trova $\frac{3}{4}r^2 = 3p$, o sia $r = 2\sqrt{p}$, ... $\frac{1}{4}br^2 = 2q$, ò sia $b = \frac{8q}{r^2} = \frac{2q}{p}$. Col raggio $2\sqrt{p}$ si descriva un circolo, ed in esso prendasi un arco, che abbia per seno $\frac{2q}{p}$; determinato così l' arco a, $sen.\ \frac{1}{3}a$, $sen.\ \frac{(60.° - a)}{3}$, $sen.\ \frac{(60.° + a)}{3}$ sono le radici richieste. Affinchè però si possano calcolare per mezzo delle Tavole, convien ridurre i seni suddetti, i quali appartengono ad un circolo, che ha per raggio $2\sqrt{p}$, ad esser seni di un circolo che abbia il raggio delle Tavole. A quest' oggetto istituisco la proporzione $2\sqrt{p} : b :: R : \frac{b.R}{2\sqrt{p}}$,

K

$= \frac{q \cdot R}{p\sqrt{p}}$ ed ho con questo il seno dell'arco a ridotto alle Tavole.

Es.° Sia $x^3 - 3x + 1 = 0$, onde si abbia..... $p = 1$, e $q = \frac{1}{2}$; si avrà $\frac{q \cdot R}{p \cdot \sqrt{p}} = \frac{1}{2} R = sen.\ a$; quindi $a = 30.°$, e i tre valori di x sono $x = \frac{2\ sen.\ 10.°}{R}$ $= 0,3472964$; $x = \frac{2\ sen.\ 50.°}{R} = 1,5320888$;..... $x = -\frac{2\ sen.\ 70.°}{R} = -1,8793852$.

SEZIONE IV.

Della soluzione dell' equazioni di quarto grado

1176. La formola generale dell'equazioni di 4° grado è $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Se in questa manchino i tre termini intermedj si ha l'equazione pura $x^4 \mp d = 0$, la quale ha quattro radici espresse dal radicale $x = \pm \sqrt[4]{\pm d} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm d}}$, che sono tutte immaginarie, se sia d positivo, e sono due reali, e due immaginarie se sia d negativo.

Se nella formola esposta manchi il 2.° e il 4.° termine, si ha un'equazione derivativa di secondo grado $x^4 + bx^2 + d = 0$, che facendo $x^2 = z$, si riduce alla forma $z^2 + bz + d = 0$. Se questa abbia le radici ambedue reali, e positive, la proposta ne avrà due reali positive, e due reali negative. Se abbia le radici reali, ma una positiva, ed una negativa, avrà la proposta due radici reed

li, una delle quali positiva, e l' altra negativa, e due radici immaginarie. Se finalmente la trasformata in z abbia le radici, o ambedue negative, o ambedue immaginarie, saranno tutte immaginarie le radici della proposta.

1177. Posto questo convien passare alla soluzione dell' equazioni di 4°. grado complete. In queste si supponga tolto al solito il 2.° termine, onde sieno della forma $x^4+ax^2+bx+c=0$, e per ottenerne le radici si operi come insegna il seguente

Met. I. Siccome si sà che ogni equazione di grado pari è risolubile di sua natura in fattori quadratici (1022), si ponga ..... $x^4+ax^2+bx+c=(x^2+fx+g)(x^2-fx+h)=0$; ..... $x^4-f^2x^2-fgx+gh=0$. Quindi paragonando i

$+g \quad +fh$

$+h$.

coefficienti si deduce 1.° $-f^2+g+h=a$, 2.° $-fg+fh=b$ 3.° $gh=c$. Dalla 1.ª si ha $g+h=a+f^2$ e moltiplicando per f, $fg+fh=fa+f^3$. Aggiungendo adesso e sottraendo da questa la 2ª. si trovano le due $2fh=f^3+fa+b$, $2fg=f^3-fa-b$; si moltiplichino queste insieme, e ne deriverà ..... $4f^2gh=f^6+2f^4a+f^2a^2-b^2$; ma $gh=c$; dunque $4f^2c=f^6+2f^4a+f^2a^2-b^2$; o sia, trasponendo... $f^6+2af^4+(a^2-4c)f^2-b^2=0$....(P), equazione cubica derivativa, che posto $f^2=z$, diviene ..... $z^3+2az^2+(a^2-4c)z-b^2=0$. Da questa dunque si può dedurre il valore di z, e perciò quello di $f=\pm\sqrt{z}$, che deve esser reale perchè l' equazione in z è di grado impari ; e dev' esser positivo, perchè l'omogeneo c è generalmente negativo. Ottenuto f, si ha g, ed h dall' equazioni .....

$2fh=f^3+fa+b$, $2fg=f^3+fa-b$; ottenuti questi valori, altro non resta che sostituirli nell' equazioni ipotetiche $x^2+fx+g=0$, $x^2-fx+h=0$, e dedurre da queste i quattro valori di, x che saranno le radici dell' equazione proposta.

1178. *Scol.* Siccome z ha tre diversi valori, ne segue che sei valori debb' avere f, e perciò che g ed h ne debbano avere altrettanti; e per conseguenza, che dodici debbano essere l' equazioni ipotetiche, il che pare assordo. E' facile però a vedersi, che sei dell' equazioni suddette sono identiche all'altre sei, coppia per coppia, perlochè l' equazioni si riducono a sei. Oltre di questo riflettendo ulteriormente si comprende, che le sei equazioni di cui si parla, non sono altro che le combinazioni a due a due delle quattro radici dell' equazione proposta, e perciò si conosce che due di tali equazioni sono sufficienti per somministrare le quattro radici richieste.

Per vedere come le due equazioni ipotetiche debbano prender sei diverse forme basta riflettere, che i valori di f, $gpdh$, sono stati determinati con questa sola condizione, che l'equazione $x^2+fx+g=0$ contenga due delle radici dell' equazione $x^4+ax^2+bx\pm c=0$, e l' altra ..... $x^2-fx+h=0$, contenga le altre due. Essendo dunque che qualunque coppia di radici abbia il medesimo rapporto alla equazione proposta, non può una dell' equazioni ipotetiche presentar piuttosto una coppia, che un' altra di tali radici, e perciò dee ciascuna presentare le sei coppie diverse, che si possono formare delle quattro radici richieste. Con questo rimane evidente che ciascuna dell' equazioni ipotetiche deve comparire

parire sotto sei diverse forme. Tutto questo si può render più chiaro con un' esempio.

Esempio Si debbano trovare i valori di x rappresentati dall' equazione ..... $y^4-8y^3+9y^2+38y-40=0$; (*A*) Si tolga primieramente il 2°. termine con porre $y=x+2$, e si avrà la trasformata ...(*B*) ..... $x^4-15x^2+10x+24=0$. In questa si ha ..... $a=-15$, $b=10$, e $c=24$. Si sostituiscano questi valori nell' equazione cubica (*P*) trovata col Metodo esposto, cioé $z^3+2az^2+(a^2-4c)z-b^2=0$, ed essa diverra $z^3-30z^2+129z-100=0$. Si cerchino le radici di questa, e si vedrà che sono 1, 4, 25. Trovate queste si deduce $f=\pm\sqrt{z}=+1$, -1, $+2$, -2, $+5$, -5; e per mezzo di questi sei valori di f si ottengono sei valori corrispondenti per g, e per h, che sono ..... $g=-12$, -2, -8, -3, 4, 6; $h=-2$, -12, -3, -8, 6, 4.. Sostituiti questi valori nelle due equazioni ipotetiche $x^2+fx+g=0$, $x^2-fx+h=0$ si trovano dodici equazioni, e sono le seguenti

Dalla formola $x^2+fx+g=0$

Posto $f=1$..$x^2+x-12=0$; $x=+3$, $=-4$
Posto $f=-1$... $x^2-x-2=0$; $x=+2$, $=-4$
Posto $f=2$ ... $x^2+2x-8=0$; $x=+2$, $=-4$
Posto $f=-2$....$x^2-2x-3=0$; $x=+3$, $=-1$
Posto $f=5$ .... $x^2+5x+4=0$; $x=-1$, $=-4$
Posto $f=-5$....$x^2-5x+6=0$; $x=+3$, $=+2$.

Dalla formola $x^2-fx+h=0$

Posto $f=1$ ... $x^2+x-2=0$; $x=+2=-1$
Posto $f=-1$.. $x^2-x-12=0$; $x=+3=-4$
Posto $f=2$;..$x^2-2x-3=0$; $x=+3$, $=-1$
Posto $f=-2$...$x^2+2x-8=0$; $x=+2$, $=-4$
Posto $f=5$...$x^2-5x+b=0$; $x=+3$, $=+2$
Posto $f=-5$..$x^2+5x+4=0$; $x=-1$, $=-4$

Dalla ispezione di queste formole si vede adesso chiaramente, 1.° che le diverse forme delle due equazioni ipotetiche sono dodici; 2°. che le sei forme di una di tali equazioni sono identiche alle sei forme dell' altra equazione; e 3.° che ciascuna coppia di equazioni ipotetiche derivanti dalla sostituzione di un medesimo valore di z nell' equazione $f = \pm\sqrt{z}$, presenta egualmente che qualunque altra coppia, le quattro radici dell' equazione proposta.

Ottenute così le radici dell' equazione trasformata (B) si ottengono le radici della primitiva (A), con accrescere di due unità le radici della predetta equazione (B), perchè si pose $y = x+2$. Con questo le radici richieste sono finalmente ..... $x = 5, = -2, = 4, = 1$.

Met. 3.° Si traspongano i secondi due termini dell' equazione $x^4+ax^2+bx+c=0$ onde sia..... $x^4+ax^2 = -bx-c$: Si aggiunga ad ambedue i membri mx^2, onde si abbia ..... $x^4+(b+m)x^2 = m\left(x^2-\frac{bx}{m}-\frac{c}{m}\right)$. Compiasi il quadrato del primo membro, e sarà ..... $x^4+(b+m)x^2+\left(\frac{b+m}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots = m\left(x^2-\frac{bx}{m}-\frac{c}{m}+\frac{(b+m)^2}{4m}\right)$, ed estraendo la radice quadrata, ... $x^2+\left(\frac{b+m}{2}\right) = \sqrt{m}\sqrt{\left(x^2-\frac{bx}{m}-\frac{c}{m}+\frac{(b+m)^2}{4m}\right)}$. Ora affinchè il secondo membro, omesso il fattore $\sqrt{m}$

$\sqrt{m}$ divenga un quadrato perfetto, conviene che sia $\frac{b^2}{4m^2} = -\frac{c}{m} + \frac{(b+m)^2}{4m}$; Suppongasi vera quest' eguaglianza, e si avrà . . . . . .

$$x^2 + \frac{b+m}{2} = \sqrt{m}\sqrt{\left(x^2 - \frac{bx}{m} + \frac{b^2}{4m^2}\right)} \ldots$$

$$= \sqrt{m}.\left(\pm x \mp \frac{b}{2m}\right), \text{ e finalmente } \ldots$$

$$x^2 \mp x\sqrt{m} \pm \frac{b}{2\sqrt{m}} + \frac{b+m}{2} = 0, \text{ equazione in cui si}$$

contengono i due fattori quadratici . . . .

$$x^2 - x\sqrt{m} + \frac{b}{2\sqrt{m}} = + \frac{b+m}{2} = 0$$

$$x^2 + x\sqrt{m} - \frac{b}{2\sqrt{m}} = + \frac{b+m}{2} = 0$$

Per determinar la quantità m, riduco l'equazione ipotetica $\frac{b^2}{4m^2} = -\frac{c}{m} + \frac{(b+m)^2}{4m}$, ed ottengo $m^3 + 2bm^2 + b^2m - 4cm - b^2 = 0$, equazione della medesima forma, che l'equazione cubica in z, trovata col metodo primo, e che perciò deve dare per m un valor reale e positivo, onde m, e $\sqrt{m}$ debbon esser reali, e per conseguenza reali i due trinomj quadratici trovati. Determinata la costante m, si hanno immediatamente le radici dell' equazione proposta.

Met. III. Data l' equazione $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, si traspongano i tre ultimi, onde sia . . . $x^4 = -ax^2 - bx - c$; quindi si aggiunga $2x^2y + y^2$ a ciascun membro, e si avrà . . . . . .

x^4

$x^4+2x^2y+y^2=-ax^2-bx-c$, equazione il di cui
$\quad\quad\quad\quad +2yx^2 \quad +y^2$
primo membro è un quadrato. Affinchè divenga un quadrato anche il secondo, bisogna determinar y in guisa, che risulti . . . . .

$\frac{1}{4}b^2x^2=(-ax^2+2yx^2)\ (-c+y^2)$ o sia, dividendo per x^2, $\frac{1}{4}b^2=(-a+2y)(-c+y^2)$, equazione, che fatte le operazioni si riduce a $y^3-\frac{1}{2}ay^2-cy+\frac{1}{2}ac-\frac{1}{8}b^2=0$.

Da quest' equazione si avrà necessariamente un valore reale per y, che sodisfará alla condizione richiesta. Con questo si avrà . . . . .
$x^2+y=\pm x\sqrt{(-a+2y)}\pm\sqrt{(-c+y^2)}$ dove si debbon prendere i segni diversi, qualora sia bx negativo.

Facciasi $\sqrt{(-a+2y)}=m$, e $\sqrt{(-c+y^2)}=n$, e si avranno le due equazioni . . . . .
$x^2-mx-n=0$ $x^2+mx+n=0$ ed essendo b ne-
$\quad +y \quad\quad +y$
gativo, le due equazioni . . . . .
$x^2-mx+n=0$, $x^2+mx-n=0$
$\quad +y \quad\quad +y$

E' facile a vedersi, che anche questo metodo presenta di sua natura sei equazioni quadratiche, perchè ciascuno dei tre valori di y somministra due equazioni quadratiche.

Met. IV. Proposta la solita equazione generale . . $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Senza togliere il secondo membro, si traspongano gli ultimi tre termini, onde sia $x^4+ax^3=-bx^2-cx-d$ . . . (*A*). Si formi

mi il quadrato del trinomio $x^2+\frac{1}{2}ax+y$, che si trova essere $x^4+ax^3+(\frac{1}{4}a^2+2y)x^2+axy+y^2$, e di questo si aggiunga la parte . . . .

$\left(\frac{1}{4}a^2+2y\right)x^2+axy+y^2$ a ciascun membro dell' equazione $(\mathcal{A})$. Essa in questa guisa diviene . . . .

$$x^4+ax^3+\left(\frac{1}{4}a^2+2y\right)x^2+axy+y^2 \quad . \quad . \quad .$$
$$=\left(-b+\frac{1}{4}a^2+2y\right)x^2+(-c+ay)x+y^2-d,$$

equazione il di cui primo membro è un quadrato perfetto. Per render tale anche il secondo, si ponga $\left(-b+\frac{1}{4}a^2+2y\right)(y^2-d)=\left(\frac{c+ay}{2}\right)^2$. Sviluppando quest' equazione, se ne otterrà una alquanto complicata, ma pure di 3.° grado in y, per di cui mezzo si conoscerà y, dopo di che si avrà

$$x^2+\frac{1}{2}ax+y=\pm x\sqrt{\left(-b+\frac{1}{4}a^2+2y\right)}\pm\ldots\ldots$$
$$\sqrt{(y^2-d)}.$$

Questi sono i metodi di cui si può far uso, ma specialmente del primo e del secondo per ottener la soluzione dell' equazioni affette di quarto grado, o sieno semplici, o derivative.

1179. *Scol.* 1° Osservando i risultati dei metodi esposti si vede, che essi conducono tutti a divider l' equazione proposta in due equazioni quadratiche, dalle quali si possono dedurre con facilità le radici della proposta.

Tali

Tali equazioni, come si è veduto, debbon esser sempre reali. E' facile perciò a vedersi che esse debbon essere ancora ambedue razionali, qualora non sieno irrazionali le radici tutte della proposta. Difatto non può essere una di esse irrazionale, senza che tale sia anche l'altra; ed essendo irrazionali ambedue, le quattro radici che contengono, debbon pur essere irrazionali; cosa che non può aver luogo, se le radici della proposta sieno o tutte, o due razionali, perchè in virtù dei metodi usati, le due equazioni quadratiche, di cui si tratta, debbon esser due equazioni componenti l'equazione data, e perciò debbon avere le medesime radici.

1180. *Scol.* 2.° Sebbene siasi dimostrato, che le due equazioni quadratiche, ottenute con gli esposti metodi, debbano esser sempre reali, pure si può presentare in pratica qualche caso, nel quale tali equazioni compariscono immaginarie. Per togliere pertanto qualunque occasione d'incertezza, o di abbaglio, giova mostrare che sebbene l'equazioni quadratiche si presentassero sotto forma immaginaria, nondimeno l'equazion principale è sempre risolubile in due fattori quadratici reali.

1181. Sia proposta l'equazione . . . . $x^4+ax^3+(b+2)x^2+cx+1=0$. I fattori di questa, a motivo che l'omogeneo è $=1$, si suppongano $x^2+px+1=0$, $x^2+qx+1=0$. Moltiplicandoli insieme si ottiene . . . . . $x^4+(p+q)x^3+(pq+2)x^2+(p+q)x+1=0$. . . Paragonando adesso i coefficienti omologi di questa con quelli della proposta, si ha . . . $p+q=a$, $pq+2=b+2$. Dalla prima $p=a-q$; e dalla

dalla 2.ª $p=\frac{b}{q}$; perciò $a+q=\frac{b}{q}$, e $q^2-aq+b=0$,

d' onde $q=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$; . . . .

e $p=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$

Qui si vede che se abbiasi $\frac{a^2}{4}<b$, risultano p e q immaginarj, e perciò tali ancora i fattori quadratici $x^2+px+1=0$, $x^2+qx+1=0$.

Per dileguare questa difficoltà, si prendano i fattori semplici delle addotte equazioni, che sono

I. $x+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4}$; II. $x+\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4}$;

III. $x+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4}$; IV. $x+\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4}$;

Quindi, siccome si suppone $a^2<4b$, pongasi $4b=a^2+d^2$, dove d^2 può esprimere una quantità qualunque; si avrà $p=\frac{a\mp d\sqrt{-1}}{2}$; $q=\frac{a\pm d\sqrt{-1}}{2}$

per conseguenza $\sqrt{p^2-4}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-d^2-16\mp 2ad\sqrt{-1})}$

e $\sqrt{q^2-4}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-d^2-16\pm 2ad\sqrt{-1})}$

Pongasi $\frac{1}{2}\left(a^2-d^2-16\mp 2ad\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$

ed $\frac{1}{2}\left(a^2-d^2-16\pm 2ad\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$

Sosti-

Sostituendo i valori, i quattro fattori semplici diverranno . . . . . .

I. $x+\frac{1}{4}(a\mp d\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a+\alpha)+\frac{1}{4}(\pm d+\beta)\sqrt{-1}$

II. $x+\frac{1}{4}(a\mp d\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a-\alpha)+\frac{1}{4}(\mp d-\beta)\sqrt{-1}$

III. $x+\frac{1}{4}(a\pm d\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(\alpha-\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a+\alpha)-\frac{1}{4}(\pm d+\beta)\sqrt{-1}$

IV. $x+\frac{1}{4}(a\pm d\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(\alpha-\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a-\alpha)-\frac{1}{4}(\pm d-\beta)\sqrt{-1}$

Di questi si moltiplichi il primo per il terzo, ed il secondo per il quarto, e si avranno due fattori quadratici reali. della forma seguente

$$x^2+\frac{1}{2}(a+\alpha)x+\frac{1}{16}(a^2\mp d^2)+\frac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{8}(a\alpha\mp d\beta)$$

$$x^2+\frac{1}{2}(a-\alpha)x+\frac{1}{16}(a^2\mp d^2)+\frac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{1}{8}(a\alpha\mp d\beta)$$

dove resta soltanto da sostituire i volori di d, α, e β.

Osserv. Dalla possibilità d'incontrare i due fattori di un'equazione di 4°. grado sotto forma immaginaria, non si deve però temere, che ne possa derivare nella pratica un impedimento alla ricerca delle radici richieste, poichè i due fattori dell'equazione particolare da noi addotta, intanto si sono trovati immaginarj, perchè si è fatto uso del primo Metodo, e non si è avuto riguardo di liberar l'equazione proposta del secondo termine com'esso richiede.

Avendo così esposto quanto appartiene alla Teoria dell'equazioni biquadratiche, rimane che ne facciamo l'applicazione a qualche problema.

1182. *Probl.* Dati due mobili A, B, che partendo da due opposte parti, si vengono incontro con questa legge che la velocità del primo cresca secondo la progressione de' numeri naturali, in modo che nella 1ª. ora, per esempio, percorra lo spazio di una tesa; nella 2ª. di due tese, nella 3.ª di tre, e la velocità del secondo cresca come la progressione de' cubi, posta la loro distanza primitiva di 2070 tese, si cerca quante ore si richiedano perchè s' incontrino.

Soluzione. Il numero dell' ore sia x. Per trovare il viaggio fatto dal primo in questo tempo, basta prender la somma della serie $1.2.3.4,5\ldots - x$ che (*n.* 295) è $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Per trovare il viaggio fatto nel tempo stesso dal secondo mobile, convien sommare la serie $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3 \ldots x^3$, La somma di questa si trova (*n. cit.*) . . . $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{(x(x+1))^2}{4}$. Fatto questo si può formar l'equazione . . . . $\frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{x(x+1)^2}{4} = 2070$, che riducendola diviene $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 8280 = 0$ e che essendo liberata dal secondo termine acquista la forma.... $y^4 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{(132487)}{16} = 0$, equazione derivativa, che si scioglie coi metodi soliti.

SEZIONE V.

Della soluzione dell' equazioni dei gradi superiori.

1183. Le soluzioni generali, che fin' ad ora vanta l'Analisi, non si estendono al di là del quarto grado. I Metodi che sono stati scoperti per l'equazioni superiori, o non sono dotati della dovuta generalità; o procedono con tentativo, o richiedono operosissimi calcoli; ò finalmente somministrano le radici per approssimazione. Noi di tutti questi passiamo a trattarne compitamente.

1184. Prima d' ogn'altro Metodo ci si presenta il Metodo ingegnoso del ch. D. Waring, relativo alla soluzione dell' equazioni di 5.°, e di 6°. grado. Esso è il seguente.

I. Sia proposta l'equazione di 5°. grado priva del secondo termine $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Si moltiplichi per x e si aggiunga ad ambedue i membri il quadrato $(Mx^3+Nx+P)^2$ onde abbiasi la trasformata

$$(M^2+1)x^6+(2MN+a)x^4+(2MP+b)x^3+(N^2+c)x^2+(2NP+d)x+P^2=(Mx^3+Nx+P)^2 \ldots (A)$$

II. Essendo il secondo membro un quadrato, convien determinar M, N, e P in guisa che il primo membro ancora sia un quadrato. A quest' effetto suppongasi che M, N, e P abbiano già i valori opportuni, e che la radice quadrata del primo membro sia Ax^3+Bx+C. E' manifesto che il quadrato di questa radice dovrà esser eguale identicamente al primo membro dell' equazione (A). Perciò, fatto il quadrato, si avranno dal paragone dei ter-

termini omologi l'equazioni che seguono; ..... $A=\sqrt{(M^2+1)}$; $B=\frac{2MN+a}{2\sqrt{(M^2+1)}}$; $C=\frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}$ e da queste, determinati che sieno M, N, e P. si avranno i valori di A, B, e C.

III. Oltre le suddette equazioni, seguitando a paragonare i termini omologi si possono formare le tre che seguono 1.° $\frac{(2MN+a)^2}{4(M^2+1)}=N^2+c$, ovvero $\frac{2MN+a}{2\sqrt{(M^2+1)}}=\sqrt{(N^2+c)}$; . . . . 2.° $\frac{2a(2MN+a)(2MP+b)}{2(M^2+1)}=2NP+d$ . . . 3.° $\frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}=P$. Si Moltiplichi la prima per la terza, e si avrà $\frac{(2MN+a)(2MP+b)}{4(M^2+1)}=P\sqrt{(N^2+c)}$, e sostituito questo valore nella seconda, sarà . . . $2P\sqrt{(N^2+c)}=2NP+d$. Di qui adesso si hanno finalmente tre equazioni in M, N, e P, e sono

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^a & 2MN+a=2\sqrt{(M^2+1)}\times\sqrt{(N^2+c)}; \\ 2.^a & 2NP+d=2P\sqrt{(N^2+c)} \\ 3.^a & 2MP+b=2P\sqrt{(M^2+1)} \end{array}\right\}\ldots(B)$$

IV. Ottenute queste si estragga la radice da ciascun membro dell' equazione (A), e si otterrà $\pm\sqrt{(M^2+1)}x^3\pm\left(\frac{2MN+a}{2\sqrt{(M^2+1)}}\right)x\pm\frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}=Mx^3+Nx+P$. E sostituendo i valori delle due frazioni, che si hanno dalla prima, e dalla terza delle tre antecedenti equazioni, si ha . . . .

$\pm\sqrt{(M^2+1)x^3}\pm\sqrt{(N^2+c)x}\pm P=Mx^3+Nx+P$ e riducendo . . . . . .

$(\pm\sqrt{M^2+1}-M)x^3+(\sqrt{N^2+c}-N)x\pm P-P=0$ formola, che abbraccia due equazioni, la seconda delle quali è di secondo grado;

V. Queste sono l' equazioni, alle quali il metodo di Waring riconduce la soluzione dall'equazione di quinto grado. Esso però non è generale, e per discoprire i limiti della sua estensione, altro non si richiede che determinare i valori di ... M, N, e P. A quest' oggetto s' inalzi al quadrato la terza dell' equazioni (B) e si avrà .....

$M=\frac{P}{b}-\frac{b}{4P}$; $M^2=\frac{P^2}{b^2}-\frac{1}{2}+\frac{b^2}{16P^2}$ . . .

e $\sqrt{M^2+1}=\frac{P}{b}+\frac{b}{4P}$.

Similmente inalzando al quadrato la seconda di tali equazioni si ha . . . . . .

$N=\frac{cP}{d}-\frac{d}{P}$; $N^2=\frac{c^2P^2}{d^2}-\frac{c}{2}+\frac{d^2}{16P^2}$ . .

e $\sqrt{(N^2+c)}=\frac{cP}{d}+\frac{d}{4P}$. Si sostituiscano questi valori nell' equazione prima, e si avrà. .....

$2\left(\frac{P}{b}-\frac{b}{4P}\right)\left(\frac{cP}{d}-\frac{d}{4P}\right)+a$ . .

$=2\left(\frac{P}{b}+\frac{b}{4P}\right)\left(\frac{cP}{d}+\frac{d}{4P}\right)$, equazione che si riduce a . . . . . .

$\frac{cP^2}{bd}-\frac{d}{4b}-\frac{cb}{4d}+\frac{bd}{16P^2}+\frac{1}{2}a=\frac{cP^2}{bd}+\frac{d}{4b}+\frac{cb}{4d}+\frac{bd}{16P^2}$

e tol-

e tolti i termini che si distruggono, si riduce alla seguente $a = \frac{d}{b} + \frac{cb}{d}$, equazione, la quale fa vedere che il metodo non può sussistere, senza che il coefficiente a sia eguale ad una quantità determinata, espressa per $\frac{d}{b} + \frac{eb}{d}$, cioè senza che sia la somma di tre radici eguale a zero.

VI. Ritornando al nostro scopo, siccome non si è potuto determinar P, per motivo della elisione dei termini, affine di evitar quest' inconveniente, si formi il quadrato della prima equazione, e poscia si facciano in essa le sostituzioni di M, e di N, e si avrà così l'equazione

$$a\left(\frac{P}{b} - \frac{b}{4P}\right)\left(\frac{cP}{d} - \frac{d}{4P}\right) + \frac{1}{4}a^2 = \frac{cP^2}{b^2} - \frac{c}{2} + \frac{cb^2}{16P^2} + \frac{c^2P^2}{d^2} - \frac{c}{2} + \frac{d^2}{16P^2} + c,$$

la quale ridotta diviene

$$\frac{2cP^2}{bd} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{abd}{16P^2} - \frac{cP^2}{b^2} - \frac{1}{4}ac - \frac{cb^2}{16P^2} = 0,$$

e ridotta nuovamente si cangia nella seguente

$$-\frac{c^2P^2}{d^2} - \frac{1}{4}\frac{ac}{d} - \frac{d^2}{16P^2} - \left(cP^2 + \frac{1}{4}abd + \frac{b^2d^2}{16P^2}\right)\left(\frac{a}{bd} - \frac{1}{b^2} - \frac{c}{d^2}\right) = 0.$$

Questa si divida adesso per $\frac{a}{bd} - \frac{1}{b^2} - \frac{c}{d^2}$, e si avrà

$$cP^2 + \frac{1}{4}abd + \frac{b^2d^2}{16P^2} = 0,$$ di dove si ha il-

valore di P , trovato il quale , niente manca per la riduzione dell' equazioni di quinto grado a quelle di terzo , se non che il coefficiente a sia dotato del valore sopra trovato.

1185. Passiamo all' equazioni di sesto grado.

I. Sia proposta l' equazione ..... $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ e si aggiunga il quadrato $(Mx^3+Nx+P)^2$ ad ambedue i membri; ella si trasforma nella seguente . . . . $(M^2+1)x^6+(2MN+a)x^4+(2MP+b)x^3+(N^2+c)x^2+(2NP+d)x+P^2+e$ ..... $=(Mx^3+Nx+P)^2$. Pongasi che il primo membro sia un quadrato, e che abbia per radice..... Ax^3+Bx+C, e paragonando i termini omologi di $(Ax^3+Bx+C)^2=$ . . . . . $A^2x^6+2ABx^4+2ACx^3+B^2x^2+2BCx+C^2$ coi termini omologi del primo membro suddetto, si dedurranno primieramente le tre equazioni . . . . .

$$A=\sqrt{(M^2+1)};\ B=\frac{2MN+a}{2\sqrt{(M^2+1)}};\ C=\frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}.$$

II. Trovati i valori di A, B, e C dal paragone degli altri termini si ottengono le altre tre equazioni che seguono: . . . . .

$$\text{I}\quad \frac{2MN+a}{2\sqrt{(M^2+1)}}=\sqrt{(N^2+c)}$$

$$\text{II}\quad \frac{(2MN+a)(2MP+b)}{2(M^2+1)}=2NP+d$$

$$\text{III}\quad \frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}=\sqrt{(P^2+e)}.$$

Si moltiplichi la prima per la terza, e fatta la sostituzione nella seconda si avranno le tre equazioni

I.

I $2MN+a=2\sqrt{(M^2+1)}\sqrt{(N^2+c)}$.

II $2\sqrt{(P^2+e)}\sqrt{(N^2+c)}=2NP+d$.

III $2MP+b=2\sqrt{(P^2+e)}\sqrt{(M^2+1)}$.

III. Estraggasi la radice quadrata da ambi i membri della nostra equazione $(\mathcal{A})$, e si avrà per risultato

$$\pm\sqrt{(M^2+1)}x^3\pm\frac{(2MN+a)}{2\sqrt{(M^2+1)}}x\pm\frac{2MP+b}{2\sqrt{(M^2+1)}}$$

$=Mx^3+Nx+P$, ovvero impiegando le tre equazioni trovate, e trasponendo . . . . .

$$\pm(\sqrt{(M^2+1)}\pm M)x^3\pm(\sqrt{N^2+c}\pm N)x\pm\sqrt{P^2+e}\pm P=0.$$

IV. Passiamo a determinare M, N, e P.

Quadrando l'equazione III. si trova

$4M^2P^2+4bMP+b^2=4M^2P+4eM^2+4P^2+4e$, ovvero $\frac{b^2}{4e}-1-\frac{P^2}{e}=M^2-\frac{bMP}{e}$, ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente di M, cioè $\frac{b^2P^2}{4e^2}$, si ottiene $\frac{(b^2-4e)(P^2+e)}{4e^2}=\left(M-\frac{bP}{2e}\right)^2$, quindi estraendo la radice quadra . . .

$$\frac{bP+\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}}{2e}=M.$$

V. Trovato il valor di M, giova prima di passare innanzi investigare il valore di $\sqrt{(M^2+1)}$.

A quest'effetto si formi il quadrato dell'ultima equazione, e si disponga in questa guisa

$$\frac{b^2P^2+2bP\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}+b^2e}{4e^2}=M^2$$

$$-4eP^2+b^2P^2 \qquad -4e^2$$

Si aggiunga 1 ad ambedue i membri, e sarà

$$\frac{(b^2-4e)P^2+2bP\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}+b^2(P^2+e)}{4e^2}=M^2+1$$

ed estratta la radice, ...

$$\frac{P\sqrt{(b^2-4e)}+b\sqrt{(P^2+e)}}{2e}=\sqrt{(M^2+1)}.$$

VI. Passando ora a ricercare il valore di N, si quadri la seconda equazione, e fatte le riduzioni si troverà $\frac{d^2}{4e}-c-\frac{cP^2}{e}=N^2-\frac{dNP}{e}$, e perciò

$$\left(\frac{ed^2-4ce^2+d^2-4ce}{4e^2}\right)P^2=\left(\frac{N-dP}{2e}\right)^2,$$ ed estratta la radice, e fatta la trasposizione . .

$$\frac{dP+\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}}{2e}=N.$$

VII. Per trovare adesso il valore di $\sqrt{(N^2+c)}$ s' innalzi al quadrato l' ultima formola, onde si abbia

$$\frac{d^2P^2+2dP\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}+d^2P^2+d^2e-4ce^2-4ceP^2}{4e^2}=N^2$$

ed aggiunta la c, si ottiene . . . . .

$$\frac{(d^2-4ce)P^2+2dP\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}+d^2(P^2+e)}{4e^2}=N^2+c$$

estraggasi la radice, e si avrà . . . . .

$$\frac{P\sqrt{(d^2-4ce)}+d\sqrt{(P^2+e)}}{2e}=\sqrt{(N^2+c)}$$

I va-

I valori di M, ed N si pongano nell'equazione I. alzata al quadrato, la quale è . . . .

$MN+\frac{1}{4}a^2=cM^2+N^2+c$, e si arriverà ad un'equazione, che essendo ridotta a dovere, sarà di quarto grado in P, riducibile al secondo (mentre il Sig. Waring giunge ad un' equazione di grado ottavo, riducibile al quarto), da cui avendosi P, niente mancherà per ridurre la soluzione dell' equazioni di 6.° grado, alla sotuzione di quelle di 3.° grado.

VIII. Questo Metodo però è soggetto anch'esso ad una restrizione che passiamo a determinare. Nell' equazione 1.ª $MN+\frac{1}{2}a=\sqrt{(M^2+1)}\sqrt{(N^2+c)}$ si sostituiscano i valori di M, N, M^2+1, N^2+c, e si avrà

$$\left(\frac{bP+\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}}{2e}\right)\left(\frac{dP+\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}}{2e}\right)+\frac{1}{2}a=$$
$$\left(\frac{P\sqrt{(b^2-4e)}+b\sqrt{(P^2+e)}}{2e}\right)\left(\frac{P\sqrt{(d^2-4ce)}+d\sqrt{(P^2+e)}}{2e}\right),$$

e fatta la moltiplicazione si ottiene . . .

$(bdP^2+bP\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}+dP\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}+ \ldots$
$P^2\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(d^2-4ce)}+e\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(d^2-4ce)}):4e^2+\frac{1}{2}a=$
$(P^2\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(d^2-4ce)}+dP\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(P^2+e)}+ \ldots$
$bP\sqrt{(d^2-4ce)}\sqrt{(P^2+e)}+bdP^2+bde):4e^2$

In questa facciasi la riduzione, e rimarrà . . .

$e\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(d^2-4ce)}+\frac{1}{2}a=\frac{bde}{4e^2}$, d'onde si deduce $a=\frac{bd-\sqrt{(b^2-4e)}\sqrt{(d^2-4ce)}}{2e}$, valore che de-

deve aver a, affinchè abbia effetto il Metodo di Waring, e che costituisce la restrizione accennata.

1186. Passiamo ai Metodi generali.

Met. I. Il Metodo che passiamo ad esporre devesi al Sig. Varignon. Esso suppone prive l'equazioni del secondo termine, e pone l'incognita eguale alla somma di tante indeterminate, quante unità, meno una, contiene il massimo esponente dell'equazione. Per l'equazioni di terzo grado si dee fare $x=m+n$; per quelle di quarto $x=m+n+p$; per quelle di quinto, $x=m+n+p+q$ &c.

Fatte queste supposizioni si deve alzare l'uno, e l'altro membro dell'equazione ausiliare al grado dell'equazione proposta, che sia per esempio K; indi nella potenza $(m+n+p+q$ &c.$)^K$ si debbon distinguere i fattori $(m+n+p$ &c$)^{K-2}$ . . . $(x+n+p$ &c.$)^{K-3}$ &c., in vece de' quali si dee sostituire x^{K-2}, x^{K-3} &c. Fatto questo si ha un'equazione della stessa forma che l'equazione proposta; facciasi il paragone dei coefficienti omologi, e si otterranno i valori delle indeterminate m, n, p &c. e con ciò si avranno le radici dell'equazione richiesta. Questo Metodo si può vedere impiegato al *n.* 1158, per la soluzione dell'equazioni di terzo grado. Oltre di questo grado però esso divien quasi intrattabile, come se ne può uno convincere coll'esperienza.

Metodo II. *dei fattori indeterminati*. Proposta l'equazione $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+$ &c. $+k=0$ . . . . (A), pongasi eguale al prodotto di due equazioni indeterminate, delle quali una sia del grado $n-m$, e l'al-

l' altra del grado m, che sieno cioè della forma
$x^{n-m}+ax^{n-m-1}+bx^{n-m-2}$ &c. $+P=0$ ..... (B)
$x^{m}+a'x^{m-1}+b'x^{m-2}$ &c. $+P'=0$ ..... (C)
Siccome il loro prodotto dee risultare identico all' equazione proposta, si faccia il paragone de' termini omologi, per mezzo dell' equazioni, che ne derivano, e che sono sempre tante, quanti sono i coefficienti da determinarsi, si proceda alla successiva eliminazione finchè si abbia uno de' coefficienti espresso per una funzione de' coefficienti della proposta, e per l' ultimo coefficiente di una dell' equazioni ipotetiche (C), (B). Con ciò, a motivo che detto ultimo coefficiente dev' essere un divisore dell' ultimo termine dell'equazione proposta, si avrà il coefficiente di cui si tratta, e per mezzo della sostituzione nell' espressione degli altri, si avranno tutti i coefficienti di una dell' equazioni ausiliari. Quindi si avranno facilmente le sue radici, che sono nel tempo stesso radici della proposta; perchè una dell' equazioni ausiliari, si può supporre di un grado, che sia suscettibile dei metodi generali.

Determinata così l'equazione ausiliare meno elevata, si effettuerà per essa la divisione della proposta, e qualora l'equazione risultante superi il quarto grado, si ripeterà lo stesso metodo, finchè si giunga ad ottenere tutte le radici.

Applichiamo questo Metodo alla soluzione di un' equazione di sesto grado.

Sia proposta a sciogliersi l' equazione generale
$x^5+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u=0$ ..... (A)
L' equazioni ausiliari sieno . . . . .
$x^3+ax^2+bx+c=0$.. (B); $x^3+a'x^2+b'x+c'=0$... (C)

Il di loro prodotto è . . . . .

$$\left.\begin{array}{llllllll} x^6 & +a'x^5 & +b'x^4 & +c'x^3 & +ac'x^2 & +bc'x & +cc' & \\ & +a & +aa' & +ab' & +bb' & +b'c & & \\ & & +b & +a'b & +a'c & & & \\ & & & +c & & & & \end{array}\right\}=0$$

Si faccia il paragone dei termini omologi, e si avranno l' equazioni seguenti . . . .

1. $a+a'=p$; 2.^{a} $b+aa'+b'=q$; 3.^{a} $c+a'b+ab'+c'=r$ 4.^{a} $a'c+bb'+ac'+ac'=s$; 5.ª. $b'c+bc'=t$; 6.^{a} $cc'=u$

Dalla 1.ª si deduce $a'=p-a$, quindi $aa'=pa-a^2$; si sostituisca questo valore nella 2.ª, e si avrà . . $b'+pa-a^2+b=q$, d'onde $b'=q-pa+a^2-b$; perciò $b'c=qc-pac+a^2c-bc$. Ma dalla 5.ª si ha $b'c=t-bc'$; dunque $qc-pac+a^2c-bc=t-bc'$, e moltiplicando per c, $qc^2-pac^2+a^2c^2-bc^2=tc-bc'c$. Ora dalla 6.ª si ha $c'c=u$; dunque sostituendo, ... $qc^2-pac^2+a^2c^2-bc^2=tc-bu$. Quindi . .

$$b=\frac{qc^2-pac^2+a^2c^2-tc}{c^2-u}.$$

Per ottenere un' altra espressione di b, si moltiplichi per c l'equazione 3.^{a}, e sostituito il valore di cc', si avrà $c^2+a'bc+b'ac+u=rc$, di dove $b'ac=rc-u-a'bc-c^2$; ma si ha dalla seconda $b'=q-aa'-b$; dunque si moltiplichi per ac, e si otterrà $b'ac-qac-a'a^2c-abc$; quindi . . . . $rc-u-a'bc-c^2=qac-a'a^2c-abc$: si ponga per a' il suo valore $p-a$, e si avrà. . . . . $rc-u-pbc+abc-c^2=qac-p^2ac-a^3c-abc$, o sia $2abc-pbc=a^3c-pa^2c+qac-c^2-rc+u$, e finalmente $b=\frac{a^3c-pa^2c+qac-c^2-rc+u}{2ac-pc}$.

Si eguaglino adesso i due valori di b, e sarà

qc^2

$$\frac{qc^2-pac^2+a^2c^2-tc}{c^2-u}=\frac{a^3c-pa^2c+qac-c^2-rc+u}{2ac-pc}$$

e finalmente . . . . . .

$$\frac{a^3-2pc^3a^2-puca^2-2tc^2a+p^2c^4a+qc^3a+quca-}{c^3+uc}$$

$$\frac{(pqc^3+ptc^2-c^4+rc^3-ruc+u^2)}{c^3-uc}=0 \ldots (K)$$

Con quest' equazione, conoscendo c si può determinare a e per mezzo di c e di a gli altri coefficienti.

Tutto dunque si riduce a trovar c. Per riuscire in questo, basta osservare, che in virtù dell' equazione 6.ª, c dev' essere $=\frac{u}{c'}$ cioè un divisore dell' ultimo termine della proposta, onde altro non si richiede, che sostituire per c nell' ultima equazione (K) ciascun divisore di u finchè i valori, che ne risultano per a, b e c, sieno tali, che l' ausiliare (B) divenga un divisore esatto della proposta.

Se questo Metodo si voglia impiegare in equazione di un grado più elevato, s' incontrerà un calcolo sempre più operoso, finchè diverrà totalmente intrattabile.

1187. *Scol.* Il togliere il secondo termine all' equazione proposta non recherebbe che danno, mentre, se la proposta superi il 3.° grado, solleverebbe l' equazione finale ad un grado eguale, ò maggiore, dell' equazione proposta.

1188. Vi è però una specie di equazioni, vale a dire, l' equazioni reciproche, le quali col Metodo esposto possono risciogliersi ancorchè sieno di un grado molto elevato.

Prima che passiamo ad occuparcene sia LEM-

LEMMA

Se si moltiplichi un polinomio reciproco qualunque $x^{\lambda-2} + mcx^{\lambda-3} + nc^2x^{\lambda-4} + pc^3x^{\lambda-5} \ldots + qc^4x^{\lambda-5} + nc^{\lambda-4}x^2 + mc^{\lambda-3}x + c^{\lambda-2}$ per il trinomio reciproco $x^2 + Kcx + c^2$, il prodotto sarà un polinomio reciproco, ed avrà per coefficienti del secondo, terzo, quarto &c. termine, i seguenti $m+K$, $n+Km+1$, $p+Kn+m$, .. $q+Kp+n$, $r+Kq+p$, $s+Kr+q$ &c. Questa verità si riprova facilmente con moltiplicare la prima parte $x^{\lambda-2} + mcx^{\lambda-3} + nc^2x^{\lambda-4}$ &c. per $x^2 + Kcx + c^2$, e poscia la seconda parte per $c^2 + Kcx + x^2$.

1189. Posto questo sia proposta l'equazione $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} + \ldots\ldots\ldots + Bc^{\lambda-2}x^2 + Ac^{\lambda-1}x + c^\lambda = 0 \ldots$ (2), e il ritrovamento delle sue radici debba ricondursi alla soluzione di equazioni trattabili con i metodi generali.

Sieno, a quest'effetto, le due equazioni ausiliari

(R) $x^{\lambda-2} + mcx^{\lambda-3} + nc^2x^{\lambda-4} \ldots\ldots\ldots + nc^{\lambda-4}x^2 + mc^{\lambda-3}x + c^{\lambda-2} = 0 \ldots\ldots\ldots$

(S) $x^2 + Kcx + c^2 = 0$.

Fatto il prodotto di questi due fattori, in virtù del lemma si hanno l'equazioni $A = m + K$, $B = n + Km + 1$, $G = p + Kn + m$, $D = q + Kp + n$ &c., le quali sono tante, quanti sono i coefficienti dati A, B &c., e contengono tante incognite m, n, p, &c. K, quante sono le medesime equazioni; onde qualora sia dato λ, si possono sempre determinare tutti i valori

lori reali di K, e con ciò tutti i fattori quadratici dell' equazione proposta. Trovati questi, se l'equazione sia di grado pari, altro non si richiede per aver tutte le sue radici, che trovare i fattori semplici di ciascun fattor quadratico, e se ella sia di grado impari basta dividerla per il prodotto di tutti i fattori quadratici, e con ciò si ottiene il fattor lineare, che insieme co' fattori quadratici costituisce la proposta.

Sia per esempio $\lambda = 3$; si avrà $(2) = x^3 + Acx^2 + Bc^2x + c^3 = 0$, ed $(R) = x + c = 0$: Fatto il prodotto di $x+c$ per $x^2+Kcx+c^2$, ne proviene ..... $x^3+Kcx^2+c^2x+c^3$, ed effettuatone il paragone $+cx^2+Kc^2x$ coll' equazione (2) si ottiene $K = A-1$, valore che somministra il fattor quadratico ..... $x^2+c(A-1)x+c^2$.

Se sia $\lambda = 4$, si ha $(2) = x^4+Acx^3+Bc^2x^2+Ac^3x+c^4=0$, ed $(R) = x^2+mcx+c^2 = 0$. Paragonando il prodotto di (R) per $x^2+Kcx+c^2$, coll' equazione (2), si trova $m+K = A$; $2+Km = B$, onde si deduce $K = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{2-B+\frac{1}{4}A^2}$, doppio valore, da cui si hanno i due fattori quadratici di (2).

1190. *Scol.* Può avvenire, che l'equazione finale che si ottiene in K presenti dei valori immaginarj. In questo caso, si divida l' equazione proposta per il prodotto dei fattori quadratici, ottenuti dai valori reali di K, e si cerchino i fattori quadratici della risultante col metodo esposto. In questa guisa dovrà giungersi necessariamente ad ottene-

re

re tutti i fattori quadratici reali che compongono l'equazione data, e perciò ad ottenere per mezzo di essi tutte le sue radici.

1191. Il Metodo, di cui abbiamo fatto uso per risolvere l' equazioni reciproche, può servire ottimamente a ritrovare i fattori quadratici reali dell' equazioni pure, della forma $x^\lambda \pm c^\lambda = 0$, le quali altro non sono in sostanza, che equazioni reciproche, in cui i coefficienti intermedj al primo, ed all' ultimo termine sono eguali a zero.

I.° Sia proposta l' equazione $x^5+c^5=0$. Si paragoni coll'equazione (2), e si dedurrà $\lambda=5$. $\mathcal{A}=0$, $B=0$, ed $R=x^3+mcx^2+mc^2x+c^3$, e le due equazioni $m+k=0$, $m+km+1=0$ daranno $m=-k$, e perciò $k^2+k-1=0$, onde si ha $k=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Quindi il fattore $x^2+kcx+c^2=0$ riceve le due forme $x^2+\frac{cx(\sqrt{5}-1)}{2}+c^2=0$, $x^2-\frac{cx(\sqrt{5}-1)}{2}+c^2=0$, e questi due fattori insieme col fattore $x+c=0$ che si deduce naturalmente dalla proposta, sono i fattori componenti richiesti.

II.° Sia proposta l'equazione $x^6+c^6=0$; si avrà $\lambda=6$, $\mathcal{A}=0$, $B=0$, $C=0$, e le tre equazioni ..... $m+k=0$, $n+km+1=0$, $m+kn+m=0$. Dalla prima si ha $m=-k$; dalla seconda sostituendo, $n=k^2-1$, e sostituendo finalmente nella terza, $k^3-3k=0$, equazione di cui le radici sono ..... $k=0$, $k=\pm\sqrt{3}$. Quindi per $x^2+kcx+c^2=0$ si hanno i fattori $x^2+c^2=0$, $x^2+cx\sqrt{3}+c^2=0$, $x^2-cx\sqrt{3}+c^2=0$.

III.°

III.° Sia proposta l' equazione $x^7+c^7=0$. Fatto il solito paragone si ha $\lambda=\lambda$, $A=0$, $B=0$, &c., e le tre equazioni $m+k=0$, $n+km+1=0$, $n+kn+m=0$, dalle quali ne deriva $k^3+k^2-2k+1=0$ equazione che ha tutte le radici reali, e che si trovano con i metodi esposti.

IV. Sia data l' equazione $x^8+c^8=0$; sarà ..... $\lambda=8$, $A=0$, $B=0$ &c. $m+k=0$, $n+km+1=0$, $p+kn+m=0$, $2n+kp=0$ di dove si deduce $k^4-4k^2+2=0$, e $k=\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$.

V.° In generale se debbansi trovare i fattori di un'equazione della forma $x^{\mu\lambda}+c^{\mu\lambda}=0$, basta porre $x^{\mu}=z$, e trovare i fattori della trasformata $z^{\lambda}+c^{\lambda}=0$, dai quali si derivano poi facilmente quelli di $x^{\mu\lambda}+c^{\mu\lambda}=0$.

1192. Passiamo all' equazioni pure della forma $x^{\lambda}-c^{\lambda}=0$. Trattandosi di quest' equazioni, debbonsi distinguere due casi, e sono: primo che λ sia un numero pari 2μ; secondo che sia un numero impari $2\mu+1$.

Nel primo caso l' equazione è della forma $x^{2\mu}-c^{2\mu}=0$ la quale si riduce a quest'altra forma $(x^{\mu}+c^{\mu})(x^{\mu}-c^{\mu})=0$, dove altro non si richiede, che trovare i fattori di ..... $x^{\mu}+c^{\mu}$, ed $x^{\mu}-c^{\mu}$. Siccome poi quelli di $x^{\mu}+x^{\mu}$ si trovano per ciò che si è detto di sopra, quindi tutto si riduce a trovare i fattori di $x^{\mu}-c^{\mu}=0$.

I.° A quest' oggetto, io faccio nuovamente la distinzione di μ pari, ed impari; se sia $\mu = 2m$, si avrà $x^{\lambda} - c^{\mu} = (x^m - c^m)(x^m + c^m) = 0$, dove se m sia pari si proseguirà a decomporre nel modo stesso, finchè si giunga ad un fattore $x^2 - c^2$; trovato il quale si hanno i fattori di $x^4 - c^4$, di $x^6 - c^6$, di $x^8 - c^8$ &c. &c.

II.° Tutta la difficoltà si riduce pertanto al caso, in cui nella divisata decomposizione, si giunga ad un fattore $x^{\varphi} - c^{\varphi} = 0$ dove sia $\varphi = 2\mu + 1 > 1$.

Ora in questo caso, siccome l' equazione $x^{2\mu+1} - c^{2\mu+1} = 0$ è divisibile per $x - c = 0$, si eseguisca la divisione, e si avrà l'altro fattore componente $(T) \ldots x^{2\mu} + cx^{2\mu-1} + c^2 x^{2\mu-2} \ldots\ldots + c^{2\mu-2}x^2 + c^{2\mu-1}x + c^{2\mu} = 0$, il quale siccome è un polinomio reciproco si scioglie ne' suoi fattori per ciò che si è detto di sopra *n.* 1101.

Ecco una Tavola dei fattori dell' equazioni pure $x^{\lambda} \pm c^{\lambda} = 0$ fino al grado decimo, che può esser utile nella pratica.

TAVO-

Metodo III. dei divisori. Sebbene i divisori di un' equazione non differiscano dai suoi fattori, nientedimeno questo metodo siccome ha per oggetto propriamente l' equazioni numeriche, ed in queste riesce di un uso assai esteso, perchè non ne viene impedita punto l' applicazione dall'ordine dell'equazioni, merita di esser qui esposto compitamente.

I. Qualunque radice di un' equazione è divisore esatto del di lei omogeneo; questa verità ne segue da ciò che si è dimostrato (*n.* 1013.) e si può comprovare ancora facilmente con dividere per x un' equazione qualunque $x^n + ax^{n-1} \ldots\ldots + mx + K = o$, perchè trasponendo l' ultimo termine si ha $x^{n-1} + ax^{n-2} \ldots\ldots + m = \frac{K}{x}$, dove il secondo membro dev' esser intero, a motivo che è tale anche il primo. Posto questo, essendo l' equazione libera dalle frazioni, se abbia radici razionali, esse debbon esser numeri interi: si cerchino dunque tutti i divisori interi dell' ultimo termine dell' equazione data; ciascuno di essi si sostituisca nella medesima in luogo dell' incognita, e quelli che la manderanno a zero, saranno radici della medesima.

II. Qualora l' ultimo termine sia molto grande, convien renderlo minore col Metodo esposto (*n.* 1063.), altrimenti s'incontrerà necessariamente un numero grande di divisori inutili, che ritarderanno il ritrovamento di quelli, che sono utili, cioè di quelli che fanno svanir l'equazione, e ne sono per conseguenza le radici.

III. Con tutto questo però, possono accadere due inconvenienti, i quali fa d'uopo evitare, e sono

sono ; 1.° Che l' omogeneo non possa diminuirsi per veruna trasformazione, il che avviene, quando l'equazione proposta contiene delle radici irrazionali; 2.° Che sebbene l' omogeneo possa diminuirsi, non ostante s'incontrino dei divisori inutili, cosa che avviene quasi generalmente.

Per evitare questi due inconvenienti ecco il Metodo, che fa d'uopo seguire.

Essendo n uno dei divisori dell' omogeneo, si sà che l'equazione dev' esser divisibile per $x \pm n$; dunque se sostituiscasi per x una quantità qualunque n, la trasformata sarà divisibile per $m \pm n$.

Posto questo sia l' equazione generale ..... $x^c + px^{c-1} + qx^{c-2}$ &c. $+ T = 0$, in cui posto n un divisore di T, sarà $x \pm n$ un divisore di tutta l' equazione. Si diano ad x i valori 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, che procedono in progressione arimmetica; Questi si sostituiscano per x tanto nell' equazione generale, quanto nel divisore $x \pm n$, come dimostra la Tavola seguente.

TAVOLA

Ipotesi A	Sostituzioni . . B	Divisori . C
$x = 1$	$1 + p + q + r \ldots + T$	$1 + n$
$x = 0$	$\ldots\ldots\ldots T$	$0 + n$
$x = -1$	$\pm 1 \mp p + q - r \ldots + T$	$-1 + n$

Di quì si vede, che nessun divisore dell' ultimo termine di un' equazione, che risulta dall' ipotesi di $x = 0$, può essere una radice, se non sia minore di un' unità di alcuno dei divisori che

che somministra l'ipotesi di $x=1$; e non sia maggiore di un unità, di alcuno di quelli, che somministra l'ipotesi di $x=-1$. Quindi ne deriva la regola. In luogo dell'incognita si sostituisca 1,0,−1, Di ciascun risultato si scrivano per ordine progressivo i divisori, che si debbono considerare positivi, e negativi. Fra questi si scelganò quelli, che appartenendo alle tre ipotesi, procedono ordinatamente in progressione arimmetica, di cui la differenza sia 1. I termini di questa progressione, corrispondenti all'ipotesi di $x=0$, saranno altrettante radici dell'equazione proposta.

Riguardo a questo Metodo si debbon osservar tre cose, e sono 1ª. Che se le ipotesi di x somministrino due, o più progressioni, siccome possono aversi dei divisori dell'ultimo termine, i quali sieno minori di un'unità di alcuni divisori del risultato, prodotto dall'ipotesi di $x=-1$, e che sieno maggiori dei divisori del risultato, prodotto dall'ipotesi di $x=1$, e non ostante non sieno radici della proposta, convien fare delle nuove ipotesi di $x=2$, di $x=-2$, di $x=3$, di $x=-3$, &c. per iscegliere fra i divisori dei risultati, quelli che continuano le progresssioni trovate, e prendere nelle progressioni più prolungate i termini corrispondenti all'ipotesi di $x=0$; non trascurando di provare però i divisori corrispondenti ad $x=0$ dell'altre progressioni.

2ª. Se per mezzo de' divisori si possano formare delle progressioni arimmetiche, di cui la differenza sia >1, non si deve trascurare di farlo, perchè i termini che in esse corrispondono all'ipotesi di $x=0$, essendo divisi per la ragione arimmetica, posson esser radici dell'equazione

data . E' però facile a vedersi che questa sorta di progressioni non può esser di uso , che nel caso in cui l' equazione data abbia il primo termine affetto da un coefficiente, e la ragione suddetta, sia un divisore di esso . In questo caso per provare se i termini delle progressioni divisate , corrispondenti all' ipotesi di $x=0$, sieno realmente radici , si otterrà l'intento più semplicemente , dividendo l'equazione proposta per $mx\pm n$, dove m si suppone un divisore del coefficiente del primo termine, ed eguale alla ragione arrimetica , ed n il termine della progressione che corrisponde ad $x=0$.

Terza : Si deve finalmente avvertire , che se qualche progressione cresca andando dall'alto al basso , i di lei termini si debbon prender negativi, perchè siccome la serie delle ipotesi è decrescente , deve esser tale ancora la serie dei divisori .

1193. Tutto questo vale , qualora l'equazione data abbia delle radici razionali . Se ella non ne abbia , che di irrazionali , o immaginarie , potrà aver soltanto dei divisori reali quadratici . Convien pertanto vedere come questi si possano ritrovare . Ecco il Metodo , con cui riuscire in questa ricerca .

Primo . Pongasi che mx^2+nx+p sia un divisor quadratico della proposta , e formisi una tavola , come segue , di cui la colonna A contenga le ipotesi di x : la colonna B contenga i risultati , derivanti da tali sostituzioni fatte nella proposta : la colonna C i risultati prodotti dalla sostituzione dei valori ipotetici di x nel fattor supposto : la colonna D, i quadrati dei numeri supposti per x , moltiplicati per m , divisore del coefficiente del primo termine; ed in fine la colonna E contenga i residui, che nascono dal sottrarre i termini della colonna D dal fattore ipotetico trasformato che gli corrisponde nella colonna C .

TAVOLA

A	B	C	D	E
Ipotesi di x	Sostituzioni prime	Sostituzioni nel fattor supposto.	Ipotesi de' quadrati.	Differenze
$x=3$		$9m+3n+p$	$9m$	$3n+p$
$x=2$		$4m+2n+p$	$4m$	$2n+p$
$x=1$		$m+n+p$	m	$n+p$
$x=0$		p	0	p
$x=-1$		$m-n+p$	m	$-n+p$
$x=-2$		$4m-2n+p$	$4m$	$-2n+p$
$x=-3$		$9m-3n+p$	$9m$	$-3n+p$
&c. &c.		&c. &c.	&c. &c.	&c. &c.

Secondo. Osservo adesso, che i residui nella colonna E, formano una progressione arimmetica di cui n è la differenza; e perciò, siccome m si può sempre conoscere; per trovare i divisori quadratici si può seguire la seguente Regola: I. Nell' equazione data si sostituiscano i numeri 1, 0, -1 in luogo dell' incognita. II. Si trovino tutti i divisori dei risultati di queste ipotesi. III. I quadrati dei termini 1, 0, -1 moltiplicati per m, si sottraggano dai divisori trovati, presi tanto positivi, che negativi, e le differenze si dispongano per ordine. IV. Si prendano tutte le progressioni arimmetiche somministrate da questi residui. V. Un termine di queste progressioni corrispondente all' ipotesi di $x=0$, sarà il valore di p; la differenza di uno dei termini della colonna E da quello che lo

precede col suo segno, sarà il valore di n; e un divisore del coefficiente del primo termine dell'equazione data starà per m. Sostituiti questi valori nella formola mx^2+nx+p, si avrà un divisor quadratico della proposta equazione. VI. Se abbiansi più progressioni arimmetiche, ad oggetto di escludere le superflue, si ponga $x=2$, $x=-2$, $x=3$, $x=-3$ &c. e si faccia uso delle progressioni più continuate, non trascurando di riprovare anche le altre.

Es.° Sia proposta l'equazione ..... $x^4-5x^3+7x^2-5x-6=0$ la quale non ammette alcun divisor semplice razionale. Ecco l'operazione per esteso.

OPERAZIONE

A	B	C	D	E	F
Ipotesi.	Risultati	Divisori	Quadrati dell' ipotesi	Differenze	Progressioni
$x=3$	12	1.2.3.4.6.12	9	3—3—5—6—7—8—10—11—12—13—15—21	−11,−3
$x=2$	12	1.2.3.4.6.12	4	8, 2, 0, −1—2—3— 5— 6— 7— 8—10—16	−3,− 8,−1,0,−1,−1
$x=1$	8	1.2.4.8	1	7, 3, 1, 0—2—3— 5— 9	−2,− 5, 1,1,−2, 0
$x=0$	6	1.2.3.6	0	6, 3, 2, 1—1—2— 3— 6	−1,− 2, 3,2,−3, 1
$x=-1$	12	1.2.3.4.6.12	2	11, 5, 3, 2, 1, 0,− 2— 3— 4— 5— 7—13	0, 1, 5,3,−4, 2

Nella colonna *A* si sono scritte le ipotesi; nella colonna *B* i risultati; nella colonna *C* tutti i divisori dei risultati; nella colonna *D* i quadrati delle ipotesi; nella colonna *E* i residui ottenuti mediante la sottrazione di ciascun quadrato delle ipotesi da ciascun divisore corrispondente, preso positivamente, e negativamente. Nell' ultima colonna finalmente si sono scritte le progressioni arimmetiche, formate per mezzo dei residui contenuti nella colonna *E*. Fatto questo, per escludere le progressioni inutili, aggiungo l' ipotesi di $x=3$, e fatte le dovute operazioni trovo i numeri -3, -11. che continuano la seconda, e la terza progressione; perciò ritengo dette progressioni, e rigetto le altre. Quindi osservo che nella seconda progressione, all' ipotesi di $x=0$ vi corrisponde -2: pongo dunque $p=-2$. Sottraggo poi -2 da -5, e trovo -3 per il valore di n. Perchè finalmente il coefficiente di x^4 è $=1$, pongo 1 per m, ed ho così il divisore ..... x^2-3x-2. Per questo divido la proposta, ed ottengo l' altro suo divisore x^2-2x+3. Se si fosse impiegata la 3.ª progressione si sarebbero trovati i medesimi fattori.

Met. IV. delle radici indeterminate. Sia proposta l'equazione generale $x^n+ax^{n-2}+bx^{n-3}+cx^{n-4}$ ec.$=0$ e pongasi $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$&c. finchè i radicali dell' ordine n^{simo} sieno di numero $n-1$:

Per determinare A, B, C, &c. suppongasi che queste quantità sieno le radici di un' equazione del grado $n-1$, indeterminata, ... $z^{n-1}+\alpha z^{n-2}+\beta z^{n-3}+$ &c. $=0$ (Q). Affinchè questo possa aver luogo, altro non si richiede che dare una for-

forma opportuna alla supposta equazione : per determinar questa, si faccia la potenza n.^{sima} dell' equazione ipotetica $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+$&c. ed in essa si avverta di sostituire α in luogo di A, B, C &c, β in luogo di $AC+AB+BC$&c. γ &c. &c.
e di trasferire dopo ciascuna moltiplicazione, tutti i termini razionali nel primo membro. Fatto questo si avrà un' equazione del grado stesso che l' equazione proposta, ed in essa i coefficienti saranno espressi per i coefficienti dell' equazione (2), α, β, γ &c. Si paragoni ciascun termine di questa col termine corrispondente della proposta, e rimarrà in questa guisa determinata la forma dell' equazione (2), e con questo si avranno i valori di A, B, C &c, e perciò quelli di x. Avvertasi però che fino al presente non si sa ottenere la determinazione della risolvente (2), se ella superi il quarto grado, se pure in essa non manchino tutti i termini, eccettuati i tre primi.

Può notarsi ancora di passaggio, che si possono formare tante equazioni, quante sono le radici dell' equazione data, per mezzo dei soli coefficienti. Di fatto essendo proposta l' equazione ..... $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}$&c.$=0$ dicendo α, β, γ, δ &c. le radici che la costituiscono, si possono formar l' equazioni $\alpha+\beta+\gamma+\delta$&c.$=-a$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma$&c.$=b$..... $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta$&c.$=-c$ Quest'equazioni però, a motivo dei diversi prodotti che contengono, sollevano troppo il grado dell'equazione finale, e perciò se non trovisi qualche metodo particolare di trattarle, non sono di uso alcuno nella pratica.

Metodo V. Per l'equazioni di cui le radici ammettono una forma Cardanica

I°. Sia proposta un' equazione generale ..... $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+A=0$, e cerchiamo prima

di tutto quali condizioni si richiedano perchè le sue radici possano comparire. sotto forma Cardanica, cioè sotto la forma . . . . .

$$\sqrt[n]{\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\mp\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2\right)}} \quad . \quad . \quad .$$
$$+\sqrt[n]{\mp\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\mp\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2\right)}}$$

, che la supporremo compresa nella forma $\sqrt[n]{R}+\sqrt[n]{S}$, e per maggior semplicità nella forma $t+u$, in modo che sia $x=t+u$.

II.° Sia dunque $x=t+u$, e si faccia la sostituzione di questo valore nell' equazione generale. Si avrà $(t+u)^n+a(t+u)^{n-1}+b(t+u)^{n-2}+$ &c. $=0$; e sviluppando le potenze, i termini disposti per ordine saranno . . . . . .

1.° $t^n+nt^{n-1}u+n\frac{(n-1)}{2}t^{n-2}u^2+n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^{n-3}u^3$ &c. $+u^n$

2.° $at^{n-1}+(n-1)at^{n-2}u+\frac{(n-1)(n-2)}{2}at^{n-3}u^2+$ &c... $+au^{n-1}$

3.° $bt^{n-2}+(n-2)bt^{n-3}u^3+\frac{(n-2)(n-3)}{2}bt^{n-4}u^2$ &c. $+bu^{n-2}$

&c. &c. I termini trovati si dispongano nel modo seguente.

(1.°) $t^n+u^n+ntu(t^{n-2}+u^{n-2})+n\frac{(n-1)}{2}t^2u^2(t^{n-4}+u^{n-4})+$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^3u^3(t^{n-6}+u^{n-6})+$ &c. . (A)

(2.°) $at^{n-1}+au^{n-1}+a(n-1)tu(t^{n-3}+u^{n-3})+$
$a\frac{(n-1)(n-2)}{2}t^2u^2(t^{n-5}+a^{n-5})+$ &c. (B)

3.°

	$x^2 - cx$
$x^7 + c^7$	$x + c$ $x^2 + k(cx^{-3} - K^2 - 2K + 1) = 0$
$x^8 + c^8$	$x^2 + cx\sqrt{\quad}$ $x^2 - cx\sqrt{\quad}$ $x^2 + cx\sqrt{\quad}$ $x^2 - cx\sqrt{\quad} = (x + c)(x - c)$

di tutto quali condizioni si richiedano perchè le sue radici possano comparire sotto forma Cardanica, cioè sotto la forma . . . . .

$$\sqrt[n]{\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\mp\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2\right)}} \quad . \quad . \quad .$$
$$+\sqrt[n]{\mp\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\mp\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2\right)}}$$

, che la supporremo compresa nella forma $\sqrt[n]{R}+\sqrt[n]{S}$, e per maggior semplicità nella forma $t+u$, in modo che sia $x=t+u$.

II.° Sia dunque $x=t+u$, e si faccia la sostituzione di questo valore nell' equazione generale. Si avrà $(t+u)^n+a(t+u)^{n-1}+b(t+u)^{n-2}+$ &c. $=0$; e sviluppando le potenze, i termini disposti per ordine saranno . . . . . .

1.° $t^n+nt^{n-1}u+n\frac{(n-1)}{2}t^{n-2}u^2+n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^{n-3}u^3$ &c. $+u^n$

2.° $at^{n-1}+(n-1)at^{n-2}u+\frac{(n-1)(n-2)}{2}at^{n-3}u^2+$ &c... $+au^{n-1}$

3.° $bt^{n-2}+(n-2)bt^{n-3}u^3+\frac{(n-2)(n-3)}{2}bt^{n-4}u^2$ &c. $+bu^{n-2}$

&c. &c. I termini trovati si dispongano nel modo seguente.

(1.°) $t^n+u^n+ntu(t^{n-2}+u^{n-2})+n\frac{(n-1)}{2}t^2u^2(t^{n-4}+u^{n-4})+$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^3u^3(t^{n-6}+u^{n-6})+$ &c. . (A)

(2.°) $at^{n-1}+au^{n-1}+a(n-1)tu(t^{n-3}+u^{n-3})+$
$a\frac{(n-1)(n-2)}{2}t^2u^2(t^{n-5}+a^{n-5})+$ &c. (B)

3.°

	$x^2 - cx$
$x^7 + c^7$	$x + c$ $x^2 + k(cx + {}^3 - K^2 - 2K + 1) = 0$
$x^8 + c^8$	$x^2 + cx$ $x^2 - cx$ $x^2 + cx$ $x^2 - cx$

$x\sqrt{2} + c^2$

$cx\sqrt{2} + c^2$

$= (x + c)(x - c)$

trovo nel termine (A), $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^3u^3(t^{n-6}+u^{n-6})$ $=\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}(u^3t^{n-3}+t^3u^{n-3})$; nel termine (C) trovo $b(n-2)tu(t^{n-4}+u^{n-4})=b(n-2)(ut^{n-3}+tu^{n-3})$; e nel termine (D) trovo $ct^{n-3}+cu^{n-3}$. Faccio pertanto il paragone della prima quantità con le altre due ed ottengo $3°.-n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}(t^{n-3}u^3+u^{n-3}t^3)$ $=q(n-2)t^{n-3}u+tu^{n-3}+ct^{n-3}+cu^{n-3}$, equazione che sostituito per b il suo valore $-ntu$, diviene tale che non può verificarsi in verun modo, seppure non sia $c=0$, perchè in quest' ipotesi svaniscono i termini $ct^{n-3}+cu^{n-3}$, e gli altri prendono la forma ..... $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}t^3u^3(t^{n-6}+u^{n-6})+b(n-2)tu(t^{n-4}+u^{n-4})$

ed appartengono perciò ad altra classe di termini. Dunque l' equazione cercata dev' esser mancante del quarto termine.

1.° t^n+

2.° at^n

VI. Venendo ai termini afferti dall' esponente $n-4$, si vede 4°. che a motivo di $a=0$, e $c=0$,

3.° l

deve aversi l'equazione $-n\frac{(n-1)}{2}t^2u^2(t^{n-4}+u^{n-4})$

&c.

$=b(n-2)tu(t^{n-4}+u^{n-4})+dt^{n-4}+du^{n-4}$ e sostituendo $-ntu$ in luogo di b, $\frac{-n(n-1)}{2}t^2u^2$ .....

(1.°)

$=-n(n-2)t^2u^2+d$, e perciò $d=\frac{n(n-3)}{2}t^2u^2$

VII. Paragonando i termini dotati dell' esponente $n-5$, si vede 5°. in virtù del raziocinio

(2.°)

usa-

usato di sopra, che non può succedere la distruzione scambievole di essi, senza che sia $e=o$, dal che ne segue, che l'equazione richiesta debba esser priva del sesto termine.

VIII. Si prosegua il medesimo calcolo, e si concluderà che un' equazione, la quale abbia le radici espresse per una formola Cardanica, dev' esser mancante dei termini di sito pari; e che i coefficienti degli altri termini debbon essere ordinatamente n, $\frac{n(n-3)}{2}$, $\frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}$ ..... $\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot}$ $\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot}$ &c. &c. &c.

Quindi l' equazione generale, di cui le radici possono comparire sotto forma Cardanica, è la seguente .....

$$x^n - ntux^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}t^2u^2x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}\ldots$$

$$t^3u^3x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot}t^4u^4x^{n-8} + \text{ &c. &c.}$$

$$- t^n - s^n = o \ldots. (k)$$

IX. Trovata adesso la forma dell' equazioni, di cui le radici ammettono la forma Cardanica, rimane da vedersi come si possa procedere alla di loro soluzione.

Essendo proposta un' equazione priva dei termini di sito pari eccettuato l' ultimo; di cui i coefficienti numerici sieno eguali ai coefficienti respettivi esposti qui sopra, 1, $\frac{n(n-3)}{2.}$ .....

$\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}$, $\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}$,

&c. &c. dell'equazione generale, dove sia sostituito ad n il grado dell'equazione proposta, e che contenga nei respettivi termini delle quantità corrispondenti a tu, t^2u^2, &c. si paragoni il secondo, e l'ultimo termine di essa col secondo, ed ultimo termine dell'equazione generale (k). Si avranno così due equazioni con due incognite t, u, di cui si otterranno facilmente i valori. Trovati questi si ha immediatamente una radice $x=t+u$; questa si moltiplichi per ciascuna delle radici n dell'equazione $z^n-1=0$, e si avranno con ciò tutte le radici richieste.

Tutto questo si renderà più chiaro con degli esempj.

Es°. Sia proposta a risciogliersi l'equazione $x^5-sax^3+sa^2x-b=0$, la quale appartiene alla specie di equazioni di cui trattiamo. Facendo il paragone indicato si trovano le due equazioni ..... $5a=5tu$, e $b=t^5+u^5$. Dalla prima si deduce $u^5=\frac{a^5}{t^5}$, valore che essendo sostituito nella seconda, somministra $t^{10}-bt^5+a^5=0$, equazione, che posto $t^5=y$, diviene $y^2-by+a^5=0$, e somministra ..... $y=t^5=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-a^5}$, di dove si deduce finalmente $t=\sqrt[5]{\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a^5)}}$. Si operi

in

in un modo stesso per rapporto ad u, e si troverà

$u = \sqrt[5]{\frac{1}{2} b \pm \sqrt{(\frac{1}{4} b^2 - a^5)}}$; quindi . . . . . .

$$x = t + u = \sqrt[5]{\tfrac{1}{2} b + \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 - a^5)}} + \sqrt[5]{\tfrac{1}{2} b - \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 - a^5)}}$$

Questa radice si moltiplichi adesso per ciascuna radice dell' equazione $z^5 - 1 = 0$, le quali sono, come si può dedurre dalle formole addotte per l'equazioni pure, 1, ...

$$\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Disponendo queste radici in guisa, che i prodotti a due formino un prodotto sempre reale $= tu = a$, si hanno finalmente le cinque radici che seguono.

1.ª $x = t + u$; 2.ª $x = t \frac{(-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}})}{4} +$

$u \frac{(-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}})}{4}$; 3.ª $x =$, .

$t \frac{(-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}})}{4} + u \frac{(-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}})}{4}$

4.ª $x = \frac{(\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})}{4} + u \frac{(\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})}{4}$ 5.ª

$$5.^a x = t\frac{(\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})}{4} + u\frac{(\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})}{4}$$

Met. VI. *Per l'equazioni che hanno delle radici eguali.*

1.° Essendo proposta un'equazione qualunque ..... $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ &c. $= 0$, la quale si sappia in virtù del Metodo esposto al *n.* 1098 che contenga delle radici eguali, volendo investigare i valori delle sole radici eguali, si formi un'equazione generale di un grado $n-2$. I termini omologi della risultante si paragonino con i termini della proposta, e si otterranno tant' equazioni, quante indeterminate si erano supposte. Si deduca di qui il valore dell'indeterminata che entra nell'equazione ipotetica di secondo grado, e si avranno così le radici eguali cercate.

Es°. Sapendosi che l'equazione $x^4 + qx + 3 = 0$ contenga due radici eguali, si vuol sapere il valore di tali radici. Suppongo che le contenga l'equazione $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, e perciò che le radici eguali sieno eguali ad m. Quest'equazione la moltiplico per un'altra equazione generale di secondo grado $x^2 - ax + b = 0$, ed ottengo la risultante .....

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2mx^3 + m^2x^2 - am^2x + bm^2 \\ \quad - ax^3 + 2amx^2 - 2bmx \\ \quad\quad + bx^2 \end{array}\right\} = 0$$

Fatto il paragone dei termini omologi, ottengo le quattro equazioni seguenti ..... 1.ª $.2m + a = 0$; 2.ª $.m^2 + 2am + b = 0$. 3.ª $am^2 + 2bm = 4$; 4.ª $bm^2 = 3$. Dalla prima derivo $a = -2m$; sostituisco questo valore nella seconda, e trovo $b = 3m^2$; sostituisco dinuovo nella quarta, ed ho $3m^4 = 3$, e perciò

ciò $m=1$, valore che verifica le quattro equazioni addotte : dunque concludo, che le due radici eguali richieste sono 1, 1.

2°. Siccome per il Teor. di Hudd' si sa (*n.* 1097.) che qualora un' equazione contenga un numero m di radici eguali, la sua trasformata, che si ottiene con moltiplicare ciascun suo termine per l' esponente che gli appartiene, dee contenere un numero $m-1$ delle medesime radici, per trovare il valore di esse, si cerchi il massimo comune divisore della proposta, e della trasformata. Questa darà un'equazione, che comprenderà $m-1$ radici eguali, ed essendo una potenza perfetta dell' ordine espresso dal numero $m-1$ delle radici eguali, che contiene, somministrerà facilmente il valore di ciascuna radice eguale.

Con questo metodo si vede, che qualora sappiasi solamente che la proposta contiene delle radici eguali, se ne può determinar facilmente il valore, ed il numero; perchè esso risulta sempre uguale al numero delle radici, che costituiscono la trasformata, accresciuto di un'unità. Vediamone un esempio.

Es°. Dato che l' equazione ..... $x^6+5x^5-20x^4-150x^3-135x^2+113x+810=0$ contenga delle radici eguali, si vuol sapere il loro valore, e il loro numero.

Per riuscire in questo, deduco la trasformata di cui si è parlato di sopra, e la trovo essere. $6x^5+25x^4-80x^3-450x^2-270x+113=0$. Cerco il massimo divisor comune di questa, e della proposta, e trovo $x^3+9x^2+27x+27=0$. Estraggo da questa funzione la radice cubica, ed ottengo $x=-3$. Dunque concludo che il valore delle radici

dici eguali è —3, e che il di loro numero è .....
=3+1=4, come di fatto succede.

1194. Esposto così quanto appartiene ai Metodi esatti, convien passare ai Metodi approssimati, i quali benché inesatti, pure siccome possono darci dei valori prossimi quanto si vuole, e siccome sono l'unica risorsa, che rimane all'Analista nei casi, in cui riescono insufficienti i metodi esposti, sono degni di tutta l'attenzione, e meritano che ce ne occupiamo con maturità. Sia primieramente.

1195. *Probl.* Data un'equazione, la quale contenga delle radici reali, diseguali, si dimanda un Metodo, mediante il quale si possano determinare i limiti di tutte le sue radici reali, diseguali. *Soluz.* Dall'equazione data si deduca col Metodo esposto al (*n.*1057) l'equazione (*D*) cioè l'equazione di cui le radici sieno i quadrati delle differenze delle radici della proposta. Questa si trasformi nella sua reciproca, onde abbiasi ...., $1+\alpha v+\beta v^2+\lambda v^3 \ldots + \pi v^n = 0 \ldots . (E)$. Si trasformi adesso nuovamente con porre $v=\frac{1}{y}$ e la risultante sarà della forma ..... $y^n+\alpha y^{n-1}+\beta y^{n-2}+\lambda y^{n-3} \ldots + \pi = 0$ (*F*). Fatto questo, si cerchi una quantità *K* tale, che superi prossimamente tutte le radici positive dell'equazione (*F*) col metodo del massimo coefficiente negativo, o col metodo esposto al (*n.* 1072). Trovata questa, poichè si ha $K>y$; risulta (detta u, una qualunque differenza delle radici della proposta) $\frac{1}{K}<\frac{1}{y}<v<u^2$, e perciò $\frac{1}{\sqrt{K}}<u$, cioè minor

nore della minima differenza di sopra accennata.

Si sostituisca dunque, posto $\frac{1}{\sqrt{k}}=\delta$, in vece dell' incognita nell' equazione proposta ciascun termine successivo della serie $, 2\delta, 3\delta, 4\delta, 5\delta \ldots m\delta$ e quante variazioni di segno si otterranno, tante (*n*. 1093.) si avranno radici reali nella proposta, e i limiti di ciascuna saranno i due termini successivi della serie suddetta, i quali avranno prodotta una di tali variazioni.

1196. Intorno a questo metodo si debbon fare due osservazioni, che posson giovare assai nella pratica, e sono le seguenti. 1°. Se δ si sappia che non possa esser >1, o che si abbia una sola radice reale, in questo caso le radici reali della proposta non potranno avere alcuna differenza >1, e perciò, in luogo della progressione $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots m\delta$ si potrà sostituire successivamente ciascun termine della progression naturale $1, 2, 3, 4 \ldots m$.

2°. Se $\sqrt{k}$ non possa ottenersi in termini razionali esatti, si prenderá per δ una quantità prossimamente maggiore, e si farà l' operazione come sopra.

1197. *Metodo de' Limiti*. Sia proposta adesso l' equazione $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}$&c. $=0 \ldots (K)$ che abbia delle radici reali, diseguali, e se ne voglia determinare il valor prossimo. Si trovi un limite di una di tali radici reali col Metodo esposto. Questo limite dicasi α, e sia $\alpha<x$, e $\alpha+1>x$.

Pongasi $x=\alpha+\frac{1}{y}$ dove $\frac{1}{y}$ rappresenti ciò che si deve aggiungere ad α, onde si renda eguale ad x. Fatta la sostituzione e la riduzione, si ha la trasformata in y

$A^{I}y^{m}+B^{I}y^{m-1}+C^{I}y^{m-2}$&c. $=0 \ldots$ (K^{I}).

Si osservi adesso, che siccome dev' essere $\frac{1}{y}>0$, e <1 conviene che sia $y>1$; perciò l'equazione (K^{I}) deve contenere almeno una radice reale >1. Se ne cerchi dunque col Metodo de' Limiti il valor prossimo, e sia β, onde si possa fare $y=\beta+\frac{1}{z}$, dove $\frac{1}{z}$ è ciò, che manca a β per formare il giusto valore di y. Si faccia la sostituzione di $\beta+\frac{1}{z}$ in vece di y nell'equazione (K^{I}), e la trasformata $A^{II}z^{m}+B^{II}z^{m-1}+C^{II}z^{m-2}$&c. $=0 \ldots$ (K^{II}) avrà, per il raziocinio addotto di sopra una radice reale >1. di cui s' investigherà come sopra il valor prossimo; questo si chiamerà γ e si porrà $z=\gamma+\frac{1}{\varepsilon}$, e così inseguito, a misura dell' esattezza che si richiede.

Ovunque si termini l'operazione, per ottenere il valor prossimo cercato di ciascuna radice reale diseguale si dovranno raccogliere in forma di frazione continua i successivi valori, onde abbiasi per esempio $x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\varepsilon+}}}$ &c.

Di qui si dedurrà la frazione ordinaria equivalente, e si avrà il valore cercato.

Esem-

Es.° Sia proposta à sciogliersi per approssimazione l'equazione cubica $x^3-2x-5=0$. Richiamate le denominazioni dell' equazioni esposte al (*n.*1067) convien determinare prima di tutto i coefficienti a, b, c &c. dell' equazione (D) per mezzo delle formole ivi addotte. Da esse, posto $m=3$, si deduce facilmente $A=0$, $B=-2$, $-C=-5$, $\frac{m(m-1)}{2}=n=3$; Quindi si trova ..... $P=A=0$; $Q=A^2-2B=4$; $R=A^3-3AB+3C=15$; $S=8$, $T=50$, $V=91$. Con questo $p=a=mQ=12$, $q=mS+6\frac{(Q)^2}{2}=72$; $r=mV+15QS+\frac{20(R)^2}{2}=-1497$: perciò $a=p=12$, $b=\frac{ap-q}{2}=36$, $c=\frac{bp-aq+r}{3}$ ..... $=-643$; Trovati questi valori si ottiene l'equazione (D) sotto la forma $v^3-12v^2+36v+643=0$. Ora io osservo, che a motivo della consecuzione di segno nella proposta vi si debbon contenere due radici immaginarie, e perciò una sola radice reale, onde per x sostituisco i numeri 0, 1, 2, 3, perchè il massimo coefficiente negativo 2 accresciuto di un' unità supera tutte le radici reali positive. I risultati che ottengo sono -5, -6, -1, $+16$, e di qui ne inferisco che la radice reale della proposta cade fra 2, e 3.

Sia dunque $x=2+\frac{1}{y}$. Fatta la sostituzione ottengo $-10y^2-6y-1=0$. Quest' equazione ha, per ciò che si è detto di sopra, una sola radice reale >1; d' altronde $\frac{1}{y}$ dev'esser <1, ed $y>1$; dunque

que i valori da sostituirsi per y sono ..... $0, 1, 2, 3, 4$ &c. 11, perchè il massimo coefficiente negativo accresciuto di un' unità è $= 11$. Fatte le sostituzioni trovo che i valori $10, 11$, danno due risultati $-61, +54$, e concludo che il valore intero prossimo di y è 10;

Trovato questo pongo $x = 10 + \frac{1}{z}$ ed ottengo l'equazione $61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$. Sostituiscansi per z i valori, $0, 1, 2, 3$ &c. e siccome i valori 1, e 2 presentano la variazione nei risultati $-54, +71$ pongo $z = 1 + \frac{1}{u}$, e trovo sostituendo, l'equazione $54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$; pongo successivamente per u i valori $0, 1, 2, 3$ &c., e trovo $u = 1 + \frac{1}{\varphi}$ &c. &c. Proseguendo così, e raccogliendo i valori si ottiene $x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 \text{ &c.}}}}}$

Di qui si derivano le frazioni equivalenti, e si avrà $\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{2307}{1624}$ &c. &c., le quali sono alternativamente maggiori, e minori del vero valore di x.

In

Intorno all' equazioni (K'), (K''), (K''') &c. si può dimostrare il seguente.

1198. *Teor.* Se i limiti delle radici di un' equazione, che abbia tutte le radici diseguali sieno tutti diversi, niuna dell' equazioni (K'), (K'') &c. può avere più di una radice reale >1; ma può averne più di una se fra i limiti ve ne sieno di eguali.

Dimostrazione. Difatto se nell'espressione $x=\beta+\frac{1}{y}$ (1207) avesse y più di un valore reale (che, per ciò che ivi si disse, dev'esser >1) il medesimo limite β apparterrebbe a più di un valore di x, cioè à più di una radice; or questo contradice alla prima ipotesi, e può soltanto aver luogo nella seconda; dunque &c.

1199. Tornando al Metodo di approssimazione di sopra esposto, conviene avvertire che il medesimo, quantunque elegante e vantaggioso, è nondimeno, sottoposto ad alcuni difetti, che nella pratica possono riuscire incomodi soverchiamente. Questi sono i seguenti.

1°. Che per trovare la quantità $k>y$ si procede con un Metodo poco esatto, qual è quello del massimo coefficiente negativo, ovvero il Metodo di tentativo esposto al (*n.* 1082.). 2°. Che non essendo generalmente razionale il radicale $\sqrt{k}$, la quantità prossimamente maggiore, che per essa convien impiegare, può rendere il metodo meno pronto, ed esatto, poichè la differenza δ che si ottiene in questa guisa, fra i valori da sostituirsi, può risultare minore di troppo della minima differenza delle radici; 3°. che i valori da sosti-

stituirsi in luogo dell'incognita sono fratti, e perciò incomodi ad esser trattati nel calcolo.

Per corregger questi difetti, ecco il Metodo che fa d'uopo tenere.

Essendo proposta un'equazione qualunque..... $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c.=o si determini (*n.* 1193) quante radici diseguali contenga; quindi si sostituiscano succcessivamente per x i numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c. fino al massimo coefficiente negativo. Se con queste sostituzioni si ottengano tante variazioni di segno nei risultati, quante debbon esser le radici reali diseguali dell'equazione proposta, si avranno senz'altra operazione i limiti delle radici, e con ciò i loro valori prossimi. Qualora poi alcune solamente, o nessune variazioni si ottengano, si moltiplichi l'incognita x per una quantità p tale, che superi quanto basta il denominatore della minima differenza, che in questo caso dev'essere <1. Trovata la quantità p, e fatta la sostituzione di $\frac{y}{p}$ in vece di x, siccome nella trasformata la minima differenza risulta >1, si sostituiscano per y i numeri naturali fino al massimo coefficiente negativo, e si avranno così tutti i limiti delle radici componenti la trasformata, questi si dividano per p, e si avranno i limiti delle radici dell'equazione proposta. Eccone un esempio. Sia proposta l'equazione $x^4 - 15x^2 + 7x + 37 = 0$. Facendo successivamente $x=1=2=3$ &c.=15 si otttengono costantemente dei risultati dello stesso segno.

Pongo perciò $x=\frac{y}{10}$, ed ho la trasformata.....

y^4

$y^4-1500y^2+7000y+370000=0$. Sostituisco per y i numeri naturali, e trovo che le due ipotesi di $y=24$, ed $y=25$ danno due risultati di segno diverso; concludo, pertanto che 24, e 25 sono i limiti di una radice reale della trasformata, e per conseguenza, che 2, 4; 2, 5 sono i limiti di una radice reale della proposta. Proseguendo nel modo stesso si troverebbero i limiti delle altre radici reali.

1200. Un pregio assai valutabile di quest' artifizio consiste in questo, che per di lui mezzo si posson ottenere delle approssimazioni vicine all' esattezza, quanto si voglia. Per vederne un esempio, sia proposta l' equazione $x^3+5x+7=0$. Siccome per la sostituzione di -1, e di -2 ottengo due risultati di segno diverso, ne inferisco primieramente che una radice reale della suddetta equazione consiste fra -1, e -2. Per accostarmi più d' appresso al valore di tal radice, pongo $x=\frac{y}{10}$, ed ottengo la trasformata ..... $y^3+500y+7000=0$. Qui osservo che siccome una radice x esisteva fra -1, e -2, una radice reale y deve esistere fra -10, e -20. Mi faccio a restringere questi limiti, e pongo a quest' effetto $y=-15$, e siccome il risultato è negativo, mentre la supposizione di $y=-10$ presentava un risultato positivo; concludo che un valor reale di y dev' esistere fra -10, e -15. Pongo .... $y=-14=-13=-12$, e trovo sempre un risultato negativo. Pongo finalmente $y=-11$, e trovo un risultato positivo; deduco per conseguenza che una radice reale della trasformata dee cadere fra -11, e -12, e perciò che una radice reale della

la proposta dee cadere fra —1, 1, e —1, 2.

Per inoltrarmi di vantaggio nell' approssimazione pongo $y = \frac{z}{10}$; La trasformata è ..... $z^3 + 5600z + 70000 = 0$, ed in questa per essere una radice y fra —11, e —12, una radice z dev' essere fra —110, e —120: Ora sapendosi che $z = -110$ dà un risultato positivo, e che $z = -120$ dà un risultato negativo, per avvicinar di più questi limiti si faccia $z = -115 = -114 = -113 = -112$ e si avrà sempre un risultato negativo, finchè si faccia $z = -111$. Dunque una radice reale z cade fra —111, e —112; quindi una radice reale y cadrà fra —11, 1, e —11, 2 e finalmente una radice reale x cadrà fra —1, 11, e —1, 12. Ecco pertanto che si conosce un valor reale di x il quale differisce dal vero di una quantità $< \frac{1}{100}$.

Si vede poi che si può uno avanzar facilmente a delle approssimazioni straordinarie.

1201. *Scol.* Quando si è trovato il valore prossimo di una radice reale —1, 1, che non differisce dal vero, che di $\frac{1}{10}$ si può inoltrare l'approssimazione con un artifizio molto semplice. Sia per esempio l'equazione $x^3 + 5x + 7 = 0$, di cui una radice differisce, come si è veduto meno di $\frac{1}{10}$ dal vero valore. Si ponga $x = -1, 1 + z$. Fatta la sostituzione si ha $z^3 + 3, 3z^2 + 8, 63z + 0, 169 = 0$. Ora siccome z è $< \frac{1}{10}$, e perciò $z^2 < \frac{1}{100}$, e $z^3 < \frac{1}{1000}$ si possono

sono trascurare senza error sensibile i primi due termini; rimarrà $8,63z+0,169=0$, di dove si deduce $z=-\frac{0,169}{8,63}=-\frac{169}{8630}=-0,019$ presso a poco. Dunque $x=-1,1+z=-1,119$. Volendo spinger più oltre l'approssimazione si può far uso di varj artifizi dipendenti dai principj impiegati di sopra. Si può per esempio scriver l'equazione nel modo che segue cioè..... $z=\frac{-0,169}{z^2-3,3z+8,63}$ quindi porre nel denominatore in vece di z il valor prossimo trovato $-0,019$, ed in vece di z^2 il suo valor prossimo $0,000361$. Fatto questo si ha $z=\frac{-0,169}{8,693061}=-0,0194$ presso a poco; dunque prossimamente $x=-1,1194$.

La medesima equazione in z si può sciogliere senza trascurare altro che il primo termine: con questo si ha $z=-0,0195$, ed $x=-1,1195$ presso a poco. Finalmente nel modo stesso che ci siamo serviti del valor prossimo di $x=-1,1$ per trovarne uno più prossimo $-1,119$, ci possiam servire di questo per trovarne un terzo più esatto. Si ponga infatti $x=-1,119+u$. Sostituendo al solito nell'equazione proposta $x^3+5x+7=0$ si ha, trascurati i due primi termini, $8,756483u+0,00383852=0$, d'onde si deduce $u=-0,00044$, e $x=-1,11944$.

E' chiaro che per mezzo di questo valor prossimo se ne può trovare un quarto più prossimo ancora, dipoi un quinto, e così in seguito, finchè piaccia, cosicchè si può avere un'approssimazione, che si confonda quasi coll'esattezza.

1202. Dagli antichi Analisti furono immagi-

nati

nati varj altri metodi relativi allla soluzione approssimata dell' equazioni ; non son essi però punto paragonabili al Metodo esposto , e riescono quasi di niun vantaggio. Fra tali metodi si distingue il Metodo del P. Rayneaud insegnato da lui nel *liv. VI. de l' Analyse demontrèe* . Esso consiste nel dedurre dall' equazione proposta delle successive equazioni di limiti , finchè giungasi ad un' equazione risolubile. Trovate le radici dell' ultima equazione , siccome son esse i limiti delle radici che costituiscono l' equazione precedente , si possono per mezzo loro trovar le radici prossime della suddetta equazione precedente , quindi nel modo stesso si può uno avanzare al ritrovamento delle radici appartenenti all' equazioni più vicine alla proposta, finchè si pervenga ed ottener le radici richieste . Si vede , che se l' equazione proposta sia molto elevata , non solo il calcolo risulta operosissimo , ma l' approssimazione stessa riesce assai lontana dall'esattezza .

Un altro Metodo fu insegnato da *M.* Rolle membro dell'Acc.R. delle Scienze , nel suo *Traitè d' Algebre* l' a. *1699* , sotto il nome di *Cascades* . Esso pure consiste in avvicinarsi continuamente ai valori dell' incognita per mezzo di equazioni successivamente inferiori di un grado alla proposta .

Dal Calcolo Differenziale si hanno per la soluzione approssimata dell' equazioni , dei Metodi non meno eleganti che vantaggiosi : questi si posson vedere nel Calcolo Differenziale di M. Eulèr .

1203. Fin qui dell'equazioni numeriche : passiamo all' equazioni letterali . Proposta un' equazione letterale , non solubile co' i metodi esposti , si ponga l' incognita $x=A+Bm+Cm^2+Dm^3$ &c . dove sia

sia m la minima lettera cognita, che abbia parte nell' equazione. Sostituiscasi questo valore nell' equazione data, in luogo dell' incognita. Ciascuna serie verticale di termini omologi si faccia $=0$, e da quest' equazioni si deduca il valor di ciascuna delle indeterminate A, B, C, D &c. Con questo si avrà un valor dell' incognita espresso per una serie convergente.

Es.° Sia da trovarsi il valor prossimo di una radice reale dell' equazione $x^3+(pq+q^2)x-p^3-2q^3=0$ p essendo $<q$. Pongasi $x=A+Bp+Cp^2+Dp^3$ &c. e sostituendo si avrà la trasformata . . . . . .

$$\left.\begin{array}{l} A^3+3A^2Bp+3AB^2p^2+B^3p^3+3AC^2p^4 \text{ &c.} \\ \qquad +3A^2Cp^2+3A^2Dp^3+3B^2Cp^4 \text{ &c.} \\ \qquad\qquad +6ABCp^3+3A^2Ep^4 \text{ &c.} \\ \qquad\qquad\qquad +6ABDp^4 \text{ &c.} \\ Aq^2+Bq^2p+Cq^2p^2+Dq^2p^3+Eq^2p^4 \text{ &c.} \\ \quad +Aqp+Bqp^2+Cqp^3+Dqp^4 \text{ &c.} \\ -2q^3 \qquad -p^3 \end{array}\right\} =0$$

Pongasi ciascun termine separatamente $=0$, e si avranno l' equazioni 1.ª $A^3+Aq^2-2q^3=0$, di dove si deduce $A=q$; 2.ª $3A^2B+Bq^2+Aq=0$; e si deriva $B=\frac{-Aq}{3A^2+q^2}=-\frac{1}{4}$ . . . . . 3.ª $3AB^2+3A^2C+Cq^2+Bq=0$, e si ha $C=\frac{-Bq-3AB^2}{3A^2+q^2}=\frac{1}{64q}$.

4.ª $B^3+3A^2D+6ABC+Dq^2+Cq-1=0$, e perciò $D=\frac{-Cq-B^3-6ABC+1}{3A^2+q^2}=\frac{131}{5124q^2}$

5.ª $3AC^2+3B^2C+3A^2E+6ABD+Eq^2+Dq=0$;

quin-

quindi $E = \frac{-Dq-6ABD-3B^2C-3AC^2}{-3A^2+q^2} = \frac{509}{16384q^3}$

&c. &c. &c.

Fatta la sostituzione di questi valori si ha finalmente $x=q-\frac{1}{4}p+\frac{1}{64}\frac{p^2}{q}+\frac{131}{512}\frac{p^3}{q^2}+\frac{509}{16384}\frac{p^4}{q^3}$ &c. &c.

Si consulti su questa materia una Memoria laboriosissima di M. de la Grange (*Acc. di Berl. an.* 1768.)

Esposto così quanto appartiene al ritrovamento del valor prossimo delle radici reali, rimane da vedersi come si possa trovare il valor prossimo delle radici immaginarie. Sia pertanto

1204. *Probl.* Essendo proposta un'equazione che abbia delle radici immaginarie, si dimanda un Metodo con cui si possa ottenere esatto, ò prossimo il loro valore.

Saluzione 1.° Dall'equazione data si deduca in virtù del metodo insegnato al (*n.* 1067.) l'equazione (*D*), la quale abbia per radice i quadrati delle differenze che passano fra le radici della proposta. Questa (1068.) avrà per lo meno tante radici negative, quante sono le coppie di radici immaginarie, che si contengono nella proposta; e mutati i segni dei termini di sito pari, avrà tante radici positive, e perciò tante variazioni di segno, quante sono le suddette radici. Dicansi $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ due radici immaginarie indeterminate, e v l'incognita dell'equazione (*D*) con i segni mutati nei siti pari. Dovrà essere $(\alpha+\beta\sqrt{-1}-\alpha+\beta\sqrt{-1})^2 = -4\beta^2 = -v$. Sieno

k, k', k'', K''' &c. le radici reali prossime dell'equazione, (D) suddetta, e si avrá $\beta = \frac{\sqrt{k}}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{k'}}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{K''}}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{K'''}}{2}$ &c. &c.

2.° Per conoscere i valori di α si sostituisca per x, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ nell'equazione proposta; Della trasformata si formino due equazioni, una delle quali contenga tutti i termini immaginari. Queste saranno della forma seguente $\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \mathfrak{Q}\alpha^{m-2}$ ec. $= 0, m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3}$ ec. $= 0 \ldots (H)$. dove per la sostituzione accennata si hanno i coefficienti P, Q &c. p, q &c. espressi per i coefficienti della proposta, e per β. Si sostituiscano per β i sopra divisati valori, e siccome le due equazioni (H) costituivano insieme una sola equazione, un medesimo valore dee verificarle ambedue, e perciò debbono avere un comun divisore; si cerchi pertanto questo divisore, finchè giungasi ad un residuo, in cui la quantità α non superi la prima potenza; posto questo residuo eguale a zero, si avrá un' equazione affetta da α, e da β, da cui, essendo noto β, perciò che si è detto di sopra, si conoscerà il valore di α.

3.° Se la trasformata (D) abbia due radici reali eguali fra di loro, β avrà pure due valori eguali. In questo caso, poichè a ciascuno di questi valori di β possono corrispondere due diversi valori di α, nell'equazioni (H) vi dovranno esser due radici comuni; perciò la divisione, per ottenere il comun divisore, si proseguirà finchè si arrivi ad un residuo, in cui α non superi la seconda

da potenza; Le due radici dell' equazione somministrata da questo residuo fatto $=o$ daranno i due valori reali di α.

4.° Si proverebbe ugualmente, che avendo β tre valori eguali, deve α nel divisato residuo sollevarsi fino al terzo grado.

Esempio 1.° Sia proposto a trovarsi le radici immaginarie dell'equazione $x^3+x+10=0$, la quale sebbene non fosse dato che contenesse due radici immaginarie, si saprebbe dalle teorie già spiegate. Si avrà $\frac{m(m-1)}{2}=n=3$, $A=0$, $B=1$, $C=10$; quindi $\mathfrak{Q}=-2B=-2$, $R=3C=30$; $S=-B\mathfrak{Q}=2$, $T=-BR+C\mathfrak{Q}=-50$; $\mathfrak{V}=-BS+CR=298$; per conseguenza $p=m\mathfrak{Q}=-6$; $q=mS+3\mathfrak{Q}^2=18$, $r=m\mathfrak{V}+15\mathfrak{Q}S-10R^2=-8166$, ed $a=-6$, $b=9$, $c=-2704$. Si sostituiscano questi valori di a, b, e c nell'equazione (D) in cui sieno mutati i segni nei siti pari, e si avrà $v^3-6v^2+9v-2704=0$. La radice reale di questa è $=16$; dunque ..... $\beta=\frac{\sqrt{v}}{2}=2$. Per trovare α, pongo $\alpha+2\sqrt{-1}$ per x nella proposta, ed ho . . . . . $\alpha^3+6\alpha^2\sqrt{-1}-12\alpha-8\sqrt{-1}+\alpha+2\sqrt{-1}+10=0$, d'onde ne deduco le due $\alpha^3-11\alpha+10=0$, $\alpha-1=0$. Siccome ho già trovata un equazione lineare in α mi è inutile procedere alla ricerca del noto residuo, ed ho $\alpha=1$; perciò concludo che le due radici immaginarie dell'equazione data sono $1\pm2\sqrt{-1}$, il che si sperimenta esser vero colla riprova.

Esempio 2°. Sia l'equazione $x^3-8x^2+25x-26=0$, essendo $A=-8, B=25, C=-26$, si ha $\mathfrak{Q}=-50$, $R=-73$,

Si

$S=-B\mathfrak{Q}=1250$, $T=-BR+C\mathfrak{Q}=1950+1300=3250$ $v=-BS+CR=-29232$; laonde $p=-150$; $q=$ .. 11250, $r=-1031270$; quindi $a=-22$, $b=121$, $c=-400$,e perciò l' equazione (D) é . . . $v^3-22v^2+121v^3-400=0$; Una radice reale di questa é $=16$; dunque $\beta=2$. Sostituisco $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ per x , o sia $\alpha+2\sqrt{-1}$ e fatta la separazione ottengo le due $\alpha^3-8\alpha^2+13\alpha+6=0$, $3\alpha^2-16\alpha+21=0$. Moltiplico la prima per 3 , onde poterla dividere per la seconda . Il residuo lo trovo $=-8\alpha^2+18\alpha+18$. Questo parimente lo moltiplico per 3 , e poscia lo divido per la seconda equazione , e trovo un secondo residuo, in cui α è di primo grado , cioè $-74\alpha+222$. Di qui deduco $\alpha=3$; perciò concludo che le due radici immaginarie della proposta sono $3\pm2\sqrt{-1}$.

Applicazione dell' Analisi a diversi oggetti .

1205. Non è l' Analisi una scienza di pura speculazione , nè il difficil calcolo serve a pascolar solamente la dotta curiosità del Geometra . In tutto il vasto regno della natura ella mostra particolarmente la sua meravigliosa influenza , in guisa , che le più trascendenti scoperte , cui vanta la moderna Fisica , a lei debbono l' origine , l' applicazione , e le conseguenze .

Noi passiamo ad occuparci di quest' applicazione come di un oggetto non men dilettevole , che interessante .

SEZIONE I.

Applicazione dell'Analisi alla dimostrazione dei Teoremi.

1206. Un Teorema egli è una verità generale, il di cui ritrovamento non costa il più delle volte, che una piccola operazione analitica, a cui non di rado il caso stesso conduce. Quantunque però facile si presenti il discoprimento di un gran numero di Teoremi, difficile riesce oltremodo il trovarne per via sintetica la dimostrazione. Basta aprire i libri di Apollonio Pergéo, e di Archimede, per incontrare un' ambage la più rincrescevole, atta a disanimare qualunque profondo Geometra. Sembra che gli Antichi Matematici abbiano voluto compensare la facilità delle loro scoperte colla difficoltà delle dimostrazioni, se pure non vogliasi pensare, come è molto probabile, che abbiano amato di ravvolgere in un velo, direi quasi misterioso, ed accessibile a pochi, il merito dei loro ritrovati, per procurar loro così una maggiore stima, ed un rispetto maggiore. Noi essendo persuasi che il maggior travaglio punto non accresca il pregio delle scoperte, ci facciamo ad esporre un Metodo con cui dimostrare i Teoremi co' i principj stessi dell' Analisi.

1207. Essendo il Teorema una verità, che ha luogo generalmente, ne segue, che esprimendo analiticamente le proprietà che lo costituiscono, per devenire a quell'equazioni che se ne possono derivare, considerandolo come problema, debba l'equazione finale risultare identica nei suoi termini; perchè se detta equazione tale non risultasse, o dovrebbe

vrebb' essere assorda, il che è contro l' ipotesi; ò dovrebbe aver luogo per alcuni determinati valori, il che pure contradice all' ipotesi, perchè, in questo caso, la verità proposta costituirebbe un problema. Con questo solo principio dell' identità dell' equazione finale, si può dimostrare qualunque Teorema in un modo molto semplice, e spedito. Basta esprimere le proprietà che costituiscono il Teorema proposto colle opportune equazioni, riguardandolo come un problema, e quindi procedere alla successiva eliminazione. Se l'equazione finale risulti identica, sarà dimostrato che la verità proposta ha luogo generalmente, e che perciò ella è un teorema.

Si dirà che in questa guisa si viene a sacrificar l' evidenza ad una facile semplicità. Io rispondo che l' Analista cerca la certezza, e non l' evidenza sintetica, la quale niente conferisce ad estender la sfera delle cognizioni Matematiche. Una radice dedotta con legittime regole soddisfa sicuramente al problema, nè ella è meno certa, perchè la geometria non concorre a dimostrarne la verità. Ma vediamo qualche applicazione del principio esposto colla dimostrazione di alcuni Teoremi.

1208. *Teorema*. Dato un triangolo equilatero *ABC* (Fig.ª 88) se prendasi dentro di esso un punto qualunque *d*, e da esso conducasi una perpendicolare sù ciascun lato, la somma di queste perpendicolari *dh*, *di*, *dk* è sempre uguale all'altezza *BD* del triangolo; e se prendasi un punto *e* fuori del triangolo, si conducano come sopra, le perpendicolari *eg*, *ea*, *ef* sù ciascun lato, purchè detto punto esterno cada dentro il prolungamento di due lati, che non sia dalla parte dell' angolo,

$eg+ef-eo$ è parimente uguale all' altezza BD.

Dimostrazione. Essendo condotte le perpendicolari divisate, si prolunghi la perpendicolare eo, finchè incontri in M il lato CB, e dal punto o si conducano on, ol parallele respettivamente alle perpendicolari db, di. Fatto questo dicasi ..... $AB=AC=BC=2a$, $BD=b$, $Ao=x$, $do=y$, ed $oC=2a-x$; Si avrà per i triangoli simili .....

BAD, KAo, $AD:DB::Ao:oK$, cioè $a:b::x:\frac{bx}{a}=oK$.

Quindi $Kd=\frac{bx}{a}-y$. Di nuovo per i triangoli simili BCD, MCo si ha $CD:DB::Co:oM$, vale a dire $a:b::2a-x:2b-\frac{bx}{a}=oM$, perciò $dM=2b-\frac{bx}{a}-y$. Inoltre i triangoli simili BAd, Khd danno $BA:BD::Kd:hd$, cioè $2a:b::\frac{bx}{a}-y:\frac{bx}{2a}-\frac{1}{2}y=hd$. Finalmente per i triangoli simili BCD, Mdi si ha $BB:CD::MD:di$, cioè $2a:a::2b-\frac{bx}{a}-y:b-\frac{bx}{2a}+\frac{1}{2}y=di$. Sommando adesso i valori delle perpendicolari db, di, do, si ha $y+\frac{bx}{2a}-\frac{1}{2}y+b-\frac{bx}{2a}-\frac{1}{2}y$, quantità $=b=AD$ identicamente, e perciò per qualunque valore di y, e di x; vale a dire, qualunque sia il punto preso dentro al triangolo. Passiamo al secondo caso. Pongasi .....

$eo-y$, e sarà $Ke=\frac{bx}{a}+y$, $eM=2b-\frac{bx}{a}+y$. Si avrà poi

poi per i triangoli simili EDA, Kge, $BA:AD::Ke:ge$, vale à dire. $2a:a::\frac{bx}{a}+y:\frac{bx}{2a}+\frac{y}{2}=ge$. Parimente i triangoli simili BCD, Mef, somministrano $BC:CD::Me:ef$, o sia $2a:a::2b-\frac{bx}{a}+y:b-\frac{bx}{2a}+\frac{1}{2}y=ef$. Facciasi la somma delle perpendicolari eo, eg, ef, e si avrà $\frac{bx}{2a}+\frac{1}{2}y-y+b-\frac{bx}{2a}+\frac{1}{2}y=b$ identicamente; dunque &c.

1209. *Teor*. La superficie di un cono è uguale alla superficie di un circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale geometrico fra la lunghezza del cono, ed il raggio della sua base.

Dimostrazione. Sia r il raggio della base, ed l la lunghezza del cono: sarà la superficie del cono $=\frac{22.2r}{7}\times\frac{1}{2}l=\frac{22}{7}rl$: ma la superficie di un circolo, che abbia per raggio $\sqrt{rl}$, ... è $=\frac{22.2}{7}\sqrt{rl}\times\frac{1}{2}\sqrt{rl}=\frac{22}{7}rl$; dunque si ha $\frac{22}{7}rl=\frac{22}{7}rl$ equazione identica; dunque la superficie del cono è uguale generalmente al circolo descritto con un raggio $=\sqrt{rl}$. Nel modo stesso può dimostrarsi, che la superficie del cilindro è sempre uguale ad un circolo, il di cui raggio sia una media geometrica fra la sua altezza, e il diametro della base.

1210. *Teor*. Se un arco circolare KBE (Fig. 62)

faccia una rotazione intorno al diametro BN, la superficie descritta dall'arco KLB è uguale al circolo, che ha per raggio la corda KB.

Dimostrazione. Di fatto $KB=\sqrt{(KO^2+BO^2)}$, e posta $BO=x$, ed $NB=2a$, $KB=\sqrt{2ax}$; ma la superficie del circolo, che ha per raggio $\sqrt{2ax}$, è $=\frac{c}{r}ax$, e la superficie divisata è $=circ.BN.BO=\frac{c}{r}ax$; dunque ec.

Sarebbe facile col metodo usato per i Teoremi addotti, il dimostrare con pochi tratti di penna il complicatissimo secondo Libro di Euclide; ma il giovane diligente potrà occuparvisi da se stesso.

Finisco questa sezione con avvertire, che il Metodo esposto è sommamente vantaggioso nella pratica, per poter verificare sul momento certi Teoremi, di cui sarebbe difficile aver pronta la dimostrazione sintetica.

SEZIONE II.

Applicazione dell'Analisi alla soluzione dei problemi di Massimo e di Minimo.

1211. Si è veduto al (*n.* 590.) che per determinar i valori, i quali possono render massima, o minima una funzione del grado m, convien moltiplicarla ordinatamente per la progressione m, $m-1$, $m-2$ ...0, e cercar le radici della funzione trasformata, le quali sole possono a ciò soddisfare, altro non rimanendo da osservarsi, che il segno della seconda trasformata. Applichiamo questo principio alla soluzione di alcuni problemi.

1212 *Probl.* Di tutte le parabole che si possono formare colla sezione di un cono retto dato, si vuol sapere qual sia quella che ha la massima superficie. *Soluzione* (Fig^a. 29). Dicasi a il diametro della base QT, la lunghezza ET dicasi b, l'ascissa QA prodotta dal piano segante richiesto ..... DBC, $=x$; sarà $AB=\frac{bx}{a}$, e $CA=\sqrt{ax-x^2}$. Tutta la superficie $BDCB$ sarà $=\frac{4bx}{3a}\sqrt{ax-x^2}$: Differenziando, ed eguagliando a zero il risultato, giacchè (*n.* 994.) si ottiene lo stesso, che deducendo la trasformata; e perchè avendosi dei radicali, non si potrebb' ella dedurre, si ha ..... $\frac{4}{3}\frac{b}{a}\sqrt{ax-x^2}+\frac{4}{3}\frac{b}{a}x=0$; quindi $ax-x^2+x\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{3}{2}ax-2x^2=0$, ed $x=\frac{3}{4}a$, valore che produce un massimo, perchè il secondo differenziale risulta negativo; come si vede dividendo per x.

1213. *Probl.* Di tutti i coni, che possono circoscriversi ad una sfera, si cerca qual sia il minimo.

Soluz. Sia QO diametro della sfera data, $=2m$ (Fig^a. 89), sia ab il diametro, che deve aver la base del cono richiesto, e dicasi y l'altezza dK. Condotta dal punto Q la perpendicolare QP, sarà $PK=m$; dicasi x la proporzione aP del raggio cercato, e si avrà $x+m=aK$. Con questo si ha la solidità del cono richiesto $=\left(\frac{mc+cx}{r}\right)\left(\frac{x+m}{2}\right)\frac{y}{3}$

Si proceda alla differenziazione, supponendo y costante, e si avrà $x=-m$: Dunque il diametro della base richiesta dev' esser doppio del diametro della sfera. E' chiaro poi che la determinazione della base determina contemporaneamente l' altezza.

1214. *Probl.* Si dimanda di formar due sfere, che prese insieme abbiano la minima solidità fra tutte le coppie di sfere, che si possono formare in una superficie data.

Soluz. Sia a la superficie data, x il raggio di una sfera, ed y il raggio dell' altra. Detta s la superficie della sfera, che ha il raggio x, si avrà la proporzione $s:a-s::x^2:y^2$; perciò $s=\frac{ax^2}{x^2+y^2}$, e la superficie della seconda sfera sarà $a-s=\frac{ay^2}{x^2+y^2}$; quindi la solidità della prima sarà $\frac{ax^3}{3(x^2+y^2)}$; e la solidità della seconda $\frac{ay^3}{3(x^2+y^2)}$; e differenziando si dovrà avere l' equazione $\frac{3ax^2dx+3ay^2dy}{3(x^2+y^2)}-\ldots\ldots$ $\frac{(ax^3+ay^3)(2ydy+2xdx)}{3(x^2+y^2)^2}=0$, che fatta la riduzione al medesimo denominatore, e trascurato il denominator comune, diviene della forma ..... $3ax^4dx+3ax^2y^2dx+3ax^2y^2dy+3ay^4dy-2ax^3ydy-2ay^4dy-2ax^4dx-2axy^3dx=0$. Questa si divida per a, e si separi in due parti, delle quali contenga una i termini moltiplicati per dx, e l' altra i termini moltiplicati per dy, e si avranno le due

$3x^4$

$3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^3=0$ .....

$3x^2y^2+3y^4-2x^3y-2y^4=0$.

Si divida la prima per x, e la seconda per y, onde riducansi alle seguenti .....

$3x^3+3xy^2-2x^3-2y^3=0$ .....

$3x^2y+3y^3-2x^3-2y^3=0$

In queste si faccia la riduzione, e si eguaglino insieme, e sarà $3x^3+3xy^2=3x^2y+3y^3$. Di qui si dedurrà finalmente $x(x^2+y^2)=y(x^2+y^2)$, cioè $x=y$, il che dimostra, che le sfere debbon esser uguali. Che abbia luogo il minimo si vede chiaramente, perchè la seconda differenziazione della formola esprimente la solidità deve somministrare un risultato positivo.

Applicazione dell'Analisi Determinata alla soluzione de' problemi Fisico=Matematici.

1215. Siccome la soluzione dei problemi Fisico=Matematici richiede un' avvedutezza, ed una sagacità particolare, per potersi servire con successo di quei Teoremi di Fisica, che appartengono al problema, sarà vantaggioso, che di questi ci occupiamo brevemente; tanto più che questa è una materia dilettevole, ed opportuna ad eccitar maggiormente la giovanile incostanza allo studio di questa nobil disciplina.

1216. *Probl.* Debbasi trovare il raggio di una sfera, di cui non sia data veruna dimenzione.

Soluzione. Si determini il peso della sfera proposta nell' aria, e sia $=P$: se ne determini il peso nell' acqua colla bilancia idrostatica, e sia $=P'$; e dicasi p il peso di un pollice cubico di acqua. Supposto, che la sfera s' immerga interamente,

essa

essa rimuoverà dal proprio sito una sfera di acqua, eguale a se stessa; perciò, siccome si sà, che il peso, che vien perduto da un corpo immerso in un fluido, eguaglia il peso del volume che leva dal proprio sito; detto x il raggio della sfera, sarà il peso di una sfera eguale di acqua $\frac{2cx^3 p}{3r} = P - P'$, onde $x = \sqrt[3]{\frac{(P-P')3r}{2cp}}$.

Qualora la sfera galleggiasse sul fluido, le si aggiungerebbe tanto di peso, quanto se ne richiedesse per farla immergere totalmente, e si proseguirebbe l'operazione come sopra.

1217. *Problema*. Determinare il rapporto della pressione che soffre la superficie concava di una sfera, ripiena di un fluido omogeneo, alla pressione che soffre la superficie interna del cilindro circoscritto alla sfera suddetta, riempito del medesimo fluido.

Soluzione. Premesso il Teorema d' Idrodinamica: *Che la pressione da un fluido esercitata sopra una superficie qualunque, eguaglia il prodotto della medesima superficie nella distanza che passa fra il suo centro di gravità, ed il livello del fluido*, dicasi a il diametro della sfera, e c la sua circonferenza. Si avrà la pressione esercitata dal fluido nella sua superficie concava $= ca \cdot \frac{1}{2}a$; quella della superficie interna del cilindro, non comprese le basi $= ca \cdot \frac{1}{2}a$: ma quella delle basi è

=

$= \frac{1}{4} ca.a$; dunque il rapporto cercato è $\frac{2}{4} ca^2 : \frac{3}{4} ca^2$, cioè 2 : 3, rapporto eguale à quello, che sussiste fra le superficie, e fra le solidità della sfera, e la solidità del cilindro circoscritto (*Geometr.*). Questo Teorema devesi al dotto, e profondo Geometra il ch. Abb. Gregorio Fontana. (Ved. T. II. degli Atti della Soc. Italiana).

1218. *Probl.* Dato un numero μ qualunque di sfere perfettamente elastiche, e dato che la prima di esse percuota la seconda, che si suppone immobile, come tutte le altre, con una velocità v, e che quindi la seconda percuota la terza colla velocità ricevuta dalla prima, e così delle altre, supposte note le masse della prima, e dell'ultima sfera, si cerca qual debba essere il rapporto di tali sfere, affinchè la velocità dell' ultima, risulti massima.

LEMMA

Date due sfere perfettamente elastiche, m, n; se la prima percuota la seconda immobile con una velocità v, dico che la velocità della seconda sarà generalmente $= \frac{2mv}{m+n}$.

Dimostrazione. Supponghiamo che le due sfere date sieno perfettamente dure; è chiaro che dopo la percossa si moveranno ambedue insieme con la medesima velocità, perchè la prima sfera deve comunicare tanto di moto alla seconda, quanto se ne richiede, perchè possa proseguire il suo cammino

no, il che non potrebbe effettuare, se le communicasse minor moto di quello, che ella ha; dunque la quantità di moto mv si deve distribuire nella massa $m+n$ di ambedue le sfere: dee per conseguenza diminuire in ragione inversa della massa delle due sfere, onde l'espressione dev'esserne $\frac{mv}{m+n}$.

Torniamo adesso a riguardar le sfere m, n, come perfettamente elastiche. Si sa che nei corpi elastici perfettamente, la forza, con cui si restituiscono alla primiera figura, eguaglia la quantità del moto, da cui furono compressi, servendo il corpo percuziente di punto di appoggio al corpo percosso; onde possa spiegare la sua forza di restituzione: dunque siccome si suppone, che la quantità del moto comunicato dalla prima sfera alla seconda sia mv, in virtù della semplice percussione, la quale succede nei corpi elastici nella maniera stessa, che nei corpi duri, acquistando la seconda sfera un'altra quantità di moto eguale alla quantità ricevuta nella percossa, per l'intrinseca forza di restituzione, fa d'uopo, che la quantità di moto, in essa prodotto dopo la restituzione, risulti $= 2mv$, e perciò, che la sua velocità sia $= \frac{2mv}{m+n}$. Venghiamo adesso alla soluzione.

Soluzione. Le sfere da determinarsi sieno ..... m, n, p, q, r, s ... φ' φ, m, e φ essendo date. Poichè si è veduto, che la velocità della seconda sfera n, acquistata nella collissione della prima, è $= \frac{2mv}{m+n}$, ne segue, che la velocità della terza sfe-

ra,

ra, in essa prodotta dalla collissione della seconda, sia $= \frac{2nv}{n+p} = \frac{2n}{n+p} \cdot \frac{2mv}{m+n} = \frac{4vmn}{(m+n)(n+p)}$; perchè in questo caso v rappresenta la velocità della seconda sfera: che quella della quarta sfera sia $= \frac{8vmnp}{(m+n)(n+p)(p+q)}$, ed in generale, che la velocità dell' ultima sia $= \frac{2^{\mu-1} vmnp \ldots \varphi^{1}}{(m+n)(n+p)(p+q) \ldots (\varphi^{1}+\varphi)}$

Questa dunque è l'espressione, che si tratta di esaminare, per decidere se possa divenire un massimo, e con quali condizioni possa divenir tale. A quest' effetto se ne prendano i logarimmi, e si differenzi, e si avrà (poste m, e φ costanti) ..... $\frac{dn}{n} + \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q}$ &c. $- \frac{dn}{m+n} - \frac{(dn+dp)}{n+p} - \frac{(dp+dq)}{p+q}$ ec. $= 0$, e riducendo al medesimo denominatore, e separando i differenziali . . . . . $\frac{(mp-n^2)d.n}{n(m+n)(n+p)} + \frac{(nq-p^2)dp}{p(n+p)(p+q)} + \frac{(pr-q^2)dq}{q(p+q)(q+r)}$ &c. $= 0$. Si formino l' equazioni per mezzo dei coefficienti di ciascun $m : n : p : q : r : s \ldots \varphi^{1} : \varphi$; il che dimostra, dover essere le sfere cercate in progressione geometrica. Si può concluder poi, che un tal rapporto produce un massimo, perchè qualunque sia il numero delle sfere, il secondo differenziale risulta sempre negativo, come si può facilmente verificare.

ANA-

ANALISI

PARTE IV.

CAPITOLO II.

Dell'Analisi Geometrica Determinata in generale.

1219. L'Analisi Geometrica distinguer deesi per ogni riguardo dall'Analisi Algebrica. Oltrechè essa ha per oggetto le quantità continue, le quali ben differiscono dalle algebriche; procede nella soluzione de' problemi con delle regole particolari; e tanto per istituire le opportune equazioni, quanto per determinarne le radici, adopera dei principj, e delle Teorie che le appartengono esclusivamente. E' per questo che noi ne trattiamo separatamente.

1220. Avendo espresse con formole algebriche le funzioni continue, che hanno parte in un problema geometrico, due sono le operazioni, che rimangono da eseguirsi, dalle quali dipende la soluzione completa del problema; e sono 1.ª La riduzione delle condizioni date nelle opportune equazioni: 2.ª Il ritrovamento delle funzioni continue che sono rappresentate dalle radici di tali equazioni. Incominciamo dalla prima.

1221. Per esprimere, come si conviene, le condizioni di un problema geometrico colle dovute equazioni, si supponga all'uso analitico, già noto ciò che si cerca; e si descriva la figura opportuna, che insieme abbracci tutte le condizioni date.

Im-

Imposti i nomi algebrici alle quantità, che hanno parte nella questione, e ridotte in equazione le condizioni, che si presentano riducibili; qualora non rimanga compito il numero dell' equazioni, come suole non di rado avvenire, si prolunghino delle rette, si conducano delle perpendicolari, o delle parallele, per formare dei triangoli rettangoli, o simili, onde si possa dedurre qualche proporzione, o qualche diversa espressione di una medesima quantità, o altro di questo genere. Se ad onta di tutto quest' artifizio, siavi qualcheduna dell' equazioni, che sottraggasi all' accorta perspicacia dell' Analista, si osservi se fra le quantità che si possono assumere per incognite, ve ne sia qualche altra, lo che sovente succede, che possa meglio soddisfare all' opportunità del calcolo; e non trascurisi di tentare se per avventura più, riesca agevole la soluzione riguardando come incognita, non la funzione cercata, nè quelle che sono da essa dipendenti immediatamente, ma una funzione che abbia un rapporto qualunque anche lontano, alla determinazione dell' incognita. Questo è quanto si può adombrare leggermente intorno al Metodo da tenersi nel ridurre in equazione i problemi geometrici. E' questo però un passo di somma difficoltà, per cui senza un raggio animatore del genio, tutta la scorta dei precetti, (convien confessarlo ingenuamente) non è che un dubbio lume, per chi si trova nell' ambage di mille strade non men difficili, che sconosciute. Non ostante però, procureremo di rischiarare in guisa il metodo divisato, con degli esempj opportunamente scelti, che la sagace diligenza dei giovani studiosi potrà non andar defraudata del convenevol profitto.

1222. Passando alla 2.ª Operazione, cioè al ritrovamento delle quantità continue, rappresentate dalle

le radici algebraiche, il che dicesi propriamente *Costruzione*, siccome si tratta di un' operazione, che immediatamente appartiene alla soluzione del problema, giacchè: *L'equation n'est proprement qu' un signe, qui nous guide dans le calcul, et au fonds, c' est la description de la Courbe, qui resout le problème* (*M.* Cramer Analy. des Courb. pag. 91), noi per procedere con metodo più preciso, e con dettaglio più distinto distribuiremo tutta la Teoria in tante sezioni, quanti sono i diversi gradi dell'equazioni da costruirsi.

SEZIONE I.

Costruzione dell' equazioni di 1.° grado

Trattandosi di sciogliere un problema di primo grado l'equazione finale dev'esser della forma $ax \pm b = 0$, e perciò la formola da costruirsi è $x = \mp \frac{b}{a}$. Per ottenerne la costruzione, che è semplicissima, si prenda sopra una retta indefinita AB (Fig.ª 90) una parte $AC = a$, ed una parte $AD = 1$; quindi si conduca un' altra retta indefinita AG, che formi colla prima un angolo qualunque, e prendasi su di essa una porzione $AE = b$. Si avrà, conducendo la DF parallela alla CF, $x = \mp \frac{AD \cdot AE}{AC} = \mp AF = \mp \frac{b}{a}$.

1223 L' equazione finale non è però sempre così semplice, come vien supposto nella formola $ax \pm b = 0$; ma le quantità cognite, a, e b possono aver diverse forme. Di queste passiamo ad occuparci, con premettere innanzi, che qualunque

que sia la forma di $\frac{b}{a}$, essa dev' essere necessariamente lineare, altrimenti non sarebbe, come si suppone, $= x$.

1324. 1.° Sia da cotruirsi la formola $\frac{ab}{c}$. Per ottener questa, non si dee far altro, che nella costruzione della formola $\frac{b}{a}$ supporre $AD = a$, $AE = b$, ed $AC = c$, e ne risulterà $AF = \frac{ab}{c} = x$.

2.° Sia da costituirsi la formola monomia generale $\frac{abcd \ldots n}{\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu}$, in cui abbia il numeratore un fattore di più del denominatore. Trovato $\frac{ab}{\alpha} = K$, si costruisca $\frac{Kc}{\beta}$ che si trovi $= K'$; dipoi $\frac{K'd}{\gamma}$ che si trovi $= K''$, e così in seguito, e si troverà finalmente $\frac{abcd \ldots n}{\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu}$.

3.° Nel modo stesso si costruiscano le frazioni comprese nella forma generale ..... $\frac{abcd \ldots n}{\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu} \pm \frac{a'b'c'd' \ldots n'}{\alpha'\beta'\gamma'\delta' \ldots \nu'} \pm \frac{a''b''c''d'' \ldots n''}{\alpha''\beta''\gamma''\delta'' \ldots \nu''}$ &c. e nella forma $\frac{abc \ldots n \pm a'b'c' \ldots n' \pm a''b''c'' \ldots n''}{\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu}$ altro non ricercandosi per la costruzione di quest' ultima formola, che divederla nelle frazioni parziali.

4.° Con egual facilità si procede alla costruzione

ne della formola generalissima .....

$abc \ldots n \pm a'b'c' \ldots n' \pm a''b''c'' \ldots n''$ &c.

$\alpha\beta\gamma \ldots \nu \pm \alpha'\beta'\gamma' \ldots \nu' + \alpha''\beta''\gamma'' \ldots \nu''$ &c.

Richiedesi per questo solamente, che dividasi il denominatore per uno dei suoi termini, diminuito di un fattore, per esempio per $\alpha\beta\gamma \ldots \nu$ (dove per ν intendo il fattore che precede immediatamente ν) , poichè in questa guisa il denominatore suddetto diviene della forma .....

$$\nu \pm \frac{\alpha'\beta'\gamma' \ldots \nu'}{\alpha\beta\gamma \ldots \nu'} \pm \frac{\alpha''\beta''\gamma'' \ldots \nu''}{\alpha\beta\gamma \ldots \nu}, \text{ ec.},$$

forma che per il detto di sopra si può ridurre $= K$. Con questo il denominatore proposto diviene $= (\alpha\beta\gamma \ldots \nu)K$, e l' operazione vien ridotta al caso trattato di sopra.

1225. Vi sono però alcune formole, che sebbene ammettano la costruzione divisata, possono però costruirsi con metodo più semplice, mediante alcuni particolari artifizj che passiamo a dettagliar brevemente.

I.° Se abbiasi per esempio la formola $\frac{ab+bc}{d+e}$, invece di separarla in due $\frac{ab}{d+e}$, $\frac{bc}{d+e}$ per costruirle separatamente, si può fare $d+e:b::a+c:x$, con dividere il numeratore nei suoi fattori; e così avendosi $\frac{a^2-b^2}{d}$, si farà $d:a+b::a-b:x$.

II.° Qualora si abbia la funzione $\frac{abc^2-a^2b^2}{abc+c^3}$ si porrà sulle prime $\frac{ab}{c}=m$, ed ottenuta la riduzione $\frac{cm-m^2}{m+c}$ si dedurrà come sopra $m+c:m::c-m:x$

Simili artifizj varranno per gli altri casi, che sono poco da questi diversi.

1226. Prima di passare agli esempj giova qui avvertire, che non è punto necessario devenire all' equazione finale, per ottenere i valori delle incognite, qualora esse sieno più di una: anzi torna comodo costruire insieme le ultime due equazioni, per retroceder poi a costruire le altre. Ecco il metodo che dee tenersi. Si debbano costruire le radici contenute nelle due equazioni..... $ay-cx-ac=0$, $by+dx-bd=0$.

Si prenda una retta $AE=a$ sopra una retta indefinita AN (Fig.ª 91). Sulla medesima prendasi $AF=b$, e condotta un' altra indefinita EQ ad angolo qualunque colla prima EN, s'inalzi una perpendicolare $AB=C$, ed un'altra $AC=d$. Quindi posta l'origine delle ascisse in A, si dica $AP=x$, e $PM=y$, essendo PM una perpendicolare sopra EN, abbassata dall' intersezione della CF colla EQ; AP, e PM saranno i respettivi valori di x, ed y. Difatto dalla addotta costruzione si hanno le proporzioni ..... $a:c::a+x:y$; $b:d::b-x:y$, la prima delle quali dà ..... $ay-cx-ac=0$, e la seconda $by+dx-bd=0$, che sono l' equazioni proposte. Per vedere che sia più comoda la costruzione esposta, basta osservare, che procedendo all' eliminazione, l'equazioni finali in x, ed y sono $x=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}$, $y=\frac{cd(a+b)}{bc+ad}$, le quali chiedono senza dubbio una costruzione meno semplice, e meno pronta.

Esempio 1.° Si debba trovare (Fig.ª 6) nella semicirconferenza un punto C tale, che da esso conducendo due rette alle due estremità del diametro, che la de-

termina, il quadrato di una stia al quadrato dell'altra, come $m:n$.

Soluzione. Sia C il punto richiesto. Dunque abbassando da esso una perpendicolare sul diametro, che sia CI, detta x l'ascissa IF, a il diametro, si avrà $CF^2 = ax$, e $AC^2 = a^2 - ax$. Ma deve aversi $CF^2 : AC^2 :: m:n$. Dunque $ax : a^2 - ax :: m : n$, cioè $nax = ma^2 - max$, e finalmente $x = \frac{ma^2}{na+ma} = \frac{m.a}{n+m}$. La costruzione è semplicissima

1227. Si vede facilmente che ella presenta una maniera molto spedita, onde sciogliere tutti i problemi di questa specie, la quale abbraccia la condizione generale; che le figure da descriversi sopra le due corde, che sottendono la metà della semicirconferenza, sieno lati di due poligoni qualunque, fra loro simili.

Si prenda sul diametro dato un'ascissa qualunque $\frac{m}{n+m}$ computata dal vertice. S'inalzi sù di essa l'ordinata corrispondente, e il punto, nel quale da essa verrà incontrata la circonferenza, darà la soluzione cercata.

Esempio 2.° Iscrivere un quadrato in un triangolo dato.

Soluzione. Sia il triangolo ABC (Fig.ª 92) di cui la base AC sia $= a$, e l'altezza $BL = b$. Pongasi il lato del quadrato richiesto $LO = x$, onde sia $BO = b - x$. Si avrá per i triangoli simili ..... $BL:BO::AC:DE$, ossia $b:b-x::a:x$; e quindi $x = \frac{ab}{a+b}$ valore cercato. Rimane da costruirlo. A quest'effetto si prolunghi la base CA in G, finchè sia

sia $LG = a+b$; si congiungano i punti G, B, e presa sopra LG una parte $LK = AC$, si conduca dal puto K una parallela alla retta GB. Il punto O, nel quale essa incontra la perpendicolare BL determina la parte OL uguale al lato del quadrato $\frac{ab}{a+b}$. Difatto si ha $LG:LB::LK:LO$, vale a dire

$$LO = DE = \frac{LB.\ LK}{LG} = \frac{ab}{a+b}$$

1228. E' manifesto che in ogni triangolo scaleno si posson iscrivere tre diversi quadrati. Detti a, a', a'' i suoi lati; b, b', b'' le tre altezze respettive, sono $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{a'b'}{a'+b'}$, $\frac{a''b''}{a''+b''}$ l'espressioni de' lati di ciascun quadrato iscrivibile.

Volendo sapere qual di essi debba essere il massimo, siccome $ab = a'b' = a''b''$, basta osservare qual sia la minima delle somme $a+b$, $a'+b'$, $a''+b''$, e viceversa, per sapere qual debba essere il minimo quadrato iscritto. Il massimo poi, o il minimo di tali quadrati dovrà giacere sul lato, di cui la somma colla perpendicolare sul medesimo abbassata dall' angolo opposto, sia minima nel primo caso, e massima nel secondo.

Esempio 3°. Dato un angolo QEN ed un punto C fuori di esso, si vuol condurre una retta CF che formi un triangolo EMF che abbia una superficie data.

Soluzione. Siccome il punto C è dato di posizione, dev' esser data la perpendicolare CA, e condotta CD parallela al lato EQ, dev' esser nota DE, prolungamento del lato NE. Sia dunque ..... $CA = a$, $DE = b$, $EF = x$, e la superficie data $= n^2$;

e dalle due proporzioni $CF : MF :: CA : MP$, $CF : MF :: DF : EF$, si avrà $CA : MP :: DF : EF$, vale a dire $a : MP :: b+x : x$, e però $MP = \frac{ax}{b+x}$; quindi $\frac{MP \cdot AF}{2} = \frac{ax^2}{2(b+x)} = m^2$, e riducendo $x^2 - \frac{2m^2}{a} x = 2bm^2$, equazione, da cui si deduce $x = \frac{m^2}{a} \pm \sqrt{2bm^2 + \frac{m^4}{a^2}}$. Se vogliasi sapere quando il triangolo EMF risulti un minimo, non si ha che da cercare, mediante i principj esposti (*n.* 590), quando risulti un minimo la funzione $\frac{ax^2}{2(b+x)}$. Si trova che il valor di x soddisfacente è $x = -2b$.

Esempio 4°. Iscrivere un quadrato in un dato semicircolo.

Soluzione. Sia dato il semicircolo $FDKE$ (Fig.ª 93) e suppongasi già iscritto il quadrato $BDKC$. Si ponga $FB = x$, e il raggio $AF = a$, onde sia $BG = 2a - 2x$. Si avrà $BD^2 = 2ax - x^2$: dunque $2ax - x^2 = (2a - 2x)^2 = 4a^2 - 8ax + 4x^2$, cioè $x^2 - 2ax + \frac{4}{5}a^2 = 0$, di dove si ha $x = a - \sqrt{\frac{a^2}{5}} = a - a\sqrt{\frac{1}{5}}$

Per costruire questa formola, si prolunghi il raggio ortogonale IA fino in H, in modo che sia $AH = \frac{a}{5} = \frac{IA}{5}$. Col diametro IH si descriva il circolo $HSIG$. Il semmento centrale del diametro da esso prodotto sarà eguale al lato richiesto. Difatto si ha la pro-

proporzione $1A:AB:AH$, cioè $AB=\sqrt{a.\frac{a}{5}}=a\sqrt{\frac{1}{5}}$, e perciò $x=a-AB=a-a\sqrt{\frac{1}{5}}$ come sopra.

Venghiamo all' equazioni di secondo grado.

SEZIONE II.

Costruzione dell' equazioni di 2° grado.

1229. Il valore dell' incognita, derivato da un' equazione di secondo grado, noi lo supporremo irrazionale; perchè altrimenti dovendo egli esser lineare, può costruirsi per le regole date.

1.° Cominciamo dal radicale più semplice di secondo grado, e sia da costruirsi la formola $\sqrt{ab}$. Si ponga $\sqrt{ab}=x$, e si avrà $a:x:b$; e perciò la costruzione sarà ridotta al ritrovamento di una media proporzionale geometrica, il che si può effettuare in molte maniere.

Si prenda una retta $=a+b$, e sú di essa come diametro si descriva un semicircolo; Dal vertice del diametro si prenda un' ascissa $=a$, e si alzi un' ordinata: Sarà essa la media richiesta.

In altro modo. Posto sia per esempio $a>b$. Sul diametro a si descriva un semicircolo, e si prenda un' ascissa dal vertice $=b$; Su questo punto si alzi l' ordinata, e se ne congiunga la sommitá col vertice del diametro dalla parte dell' ascissa b. La corda che si ottiene cosl è la media proporzionale dimandata.

In altro modo. Sulla retta maggiore a come diametro, si descriva un semicircolo, e si prolunghi il

il diametro di una quantità $=b$. Dall'estremità del prolungamento si conduca una tangente, e sarà essa la media richiesta.

Ci potevamo dispensare dall'esporre questi semplicissimi metodi; ma è bene che il giovine si avvezzi a variare le soluzioni dei problemi.

2.° Abbiasi adesso il radicale $x=\sqrt{(ab+c)b}$. Siccome questo equivale ad $x=\sqrt{(a+c)b}$, deduco ... $a+c:x:b$:

3:° Sia $x=\sqrt{ab+cd}$. Facciasi $\frac{cd}{b}=m$, e risulterà $x=\sqrt{(a+m)b}$, onde &c.

4°. Lo stesso vale per la formola $\sqrt{a^2-b^2}$, che si costruisce con una media proporzionale, o con un triangolo rettangolo, di cui l' ipotenusa sia la retta maggiore, ed un cateto sia la minore.

5.° Nella maniera medesima potrà costruirsi $\sqrt{a^2+b^2}$, cioè facendo, a, e b due cateti di un triangolo rettangolo; benchè si può anche fare $\frac{b^2}{a}$ ... $=m$, e ridurre il radicale alla forma $\sqrt{a(a+m)}$

6.° Abbiasi adesso il radicale ..... $\sqrt{\pm ab\pm c^2\pm ef\pm g^2\pm hl}$ &c. Dividasi per un fattore dei termini sotto il segno, che sia per esempio a; il quoziente $\frac{b\pm c^2\pm ef+g^2\pm hl\&c}{a}$. Si costruisca secondo il solito, e si riduca $=m$, e il radicale proposto diverrà $=\sqrt{am}$.

In altro modo. Si prenda $ab=p^2$, $ef=q^2$, $hl=r^2$ &c. e la funzione $p^2+c^2+q^2+g^2+r^2$ & si costruisca con fare $p^2+c^2=m^2$, $m^2+q^2=n^2$; $n^2+g^2=s^2$ &c. e si avrà finalmente il radicale ridotto alla forma .....

$\sqrt{\pi^2}=\pm\pi$.

1230. Con questi principj non vi hà equazione quadratica, la quale non possa costruirsi. Per vederlo praticamente sia da costruirsi la formola generale $x=\pm\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2\pm q^2}$, e consideriamo primieramente q^2 positivo. (Fig^a 94). Si prenda $CA=\frac{1}{2}p$, e con questo raggio si descriva il circolo $AFDE$. Al punto A si conduca la tangente $AB=q$, per il centro C la segante FB. Saranno BE, BF le radici. Difatto si ha $FE=p$, $EB=x$, e perciò $px+x^2=AB^2=q^2$, cioè $x^2+px-q^2=0$.

Presa $BF=-x$, si avrebbe $x^2-px-q^2=0$.

Suppongasi adesso q^2 negativo. Conservata la medesima costruzione, in vece di condurre per B, e C la segante BF, si conduca BF' parallela al diametro AD; saranno BE, BF' le radici.

In effetto se dai punti $E'F'$ si alzino le due ordinate $E'G$, FH, si ha $AG\times GD=GE'^2=AB^2=q^2$, cioè .... $px-x^2=q^2$, onde $x^2-px+q^2=0$, e fatta $BE=-x$ si avrebbe $x^2+px+q^2=0$.

1231. Si concepisce facilmente, che se le due radici sieno eguali BF dev' esser tangente, e che non deve incontrare il circolo se sieno immaginarie.

1232. Avverto di passaggio che se abbiansi più incognite in vece d' inoltrare il calcolo fino all' equazione finale, si può uno arrestare alle due equazioni, che precedono l' equazione finale, di cui una deve esser necessariamente di secondo grado, e l' altra di primo, per costruirle insieme, come si praticò per rapporto all' equazioni lineari a più incognite.

1233. In fine osservo, che trattandosi di dover costruire una formola derivata dalla soluzione di un' equa-

equazione di secondo grado derivativa, e che ascenda al quarto grado; siccome s' incontrano in esse dei radicali che comprendono degli altri radicali, che sono però sempre quadratici, per ottenerne la costruzione, si deve cominciare da costruire il radicale contenuto sotto il radicale universale, il che d' altronde non è di alcuna difficoltà. Veniamo alla pratica.

1234. *Problema* 1.° Dato un semicircolo *ABD* (Fig.ª 94) ed una retta indefinita *MN* fuori di esso, ma nel di lui piano, e parallela al diametro, si cerca in qual maniera si debba condurre dall' estremità del diametro una retta che incontri l' indefinita *MN*, e rimanga divisa dalla circonferenza in due parti, che stiano fra di loro come $p:q$.

Soluzione. Sia *F* il punto richiesto, e conducasi *CFE* normale al diametro *AD*. Poste $AD=a$, $CE=b$, $AE=x$, $EF=y$, onde abbiasi $FC=b-y$, ed $ED=a-x$, i triangoli simili somministrano l'analogia $AF:FK::EF:FC$; Ma per ipotesi $AF:FL::\ldots\ldots$ $p:q$; Dunque $y:b-y::p:q$, ed $y=\frac{pb}{p+q}$. Ora si ha $y^2=ax-x^2$; dunque $ax-x^2=\frac{p^2b^2}{(p+q)^2}$, e finalmente $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{p^2b^2}{(p+q)^2}}$ valore cercato.

Eccone adesso la costruzione.

Sopra il raggio ortogonale *BG* si descriva un semicircolo *BHG*, ed in esso dal punto *B* conducasi la corda $BH=\frac{pb}{p+q}$; Congiunti *G*, *H* si prenda

GE

$GE = GH$, e sarà $AE = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{p^2b^2}{(p+q)^2}}$.

Di fatto $GH = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{p^2b^2}{(p+q)^2}}$ e perciò &c.

S' inalzi dunque dal punto E un' ordinata EF, ed essa incontrerà la circonferenza nel punto richiesto.

Perchè il problema sia possibile, apparisce chiaramente, che deve essere $\frac{1}{4}a^2 > \frac{p^2b^2}{(p+q)^2}$.

1235. *Problema* 2.° Trovare un triangolo, nel quale i lati insieme colla perpendicolare abbassata da uno degli angoli formino una proporzione continua.

Soluzione. Sia (Fig.ª 95) ABC il triangolo, e sia BD la perpendicolare. Poichè si ha per ipotesi ..... $AC:CB::AB:BD$, dev' essere ancora $AC:CB::AB:BD$. Dunque i triangoli ABC, ABD sono simili; ma il triangolo ABD è rettangolo, dunque dev' esser tale anche il triangolo cercato.

Conosciutane questa proprietà, dicasi m uno dei suoi cateti, ed x l'altro; si avrà $AC = \frac{x^2}{m}$, e perciò $\frac{x^4}{m^2} = x^2 + m^2$, cioè $x^4 - m^2x^2 - m^4 = 0$, equazione che dà $x = \sqrt{\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m\sqrt{5m^2}}$, tolte le due radici immaginarie, che non sono di uso. Vediamone la costruzione. Si prenda una retta AB qualunque, che suppongasi eguale ad m.

Si prenda $BL = \sqrt{5m^2}$, ed $LF = \frac{1}{2}m$, e sul dia-

diametro AF descrivasi un semicircolo $AGFO$; In esso conducasi l' ordinata GL, e sarà essa il cateto x richiesto, cioè sarà $= \pm \sqrt{\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m\sqrt{5m^2}}$.

SEZIONE III.

Costruzione dell' equazioni de' gradi superiori.

1236. Eccoci adesso a trattare della costruzione dell' equazioni superiori al secondo grado. Ad oggetto di procedere con chiarezza, e con ordine, fa d' uopo che si premetta il principio fondamentale di questa Teoria considerata in tutta la generalitá.

1237 *Principio*. Per costruire un' equazione data di qualunque grado ella sia, debbonsi scegliere due equazioni indeterminate qualunque, che sieno però tali, che eliminando una dell' incognite, la risultante sia uguale alla proposta; di poi si debbon descrivere nel medesimo piano, e colla medesima origine dell' ascisse le due curve rappresentate dalle due equazioni indeterminate, che si sono scelte. Ciò fatto, se dai punti d' intersezione di queste curve si abbassino le respettive ordinate sull' asse delle ascisse, saran' esse le radici dell' equazione proposta.

1238. Per intender bene la ragione del Principio esposto, basta osservare che nei punti d' incontro delle due curve divisate, il rapporto delle ordinate corrispondenti alle respettive ascisse, vien espresso nel tempo stesso dalle due equazioni supposte; ma tali equazioni prese insieme equivalgono per ipotesi all' equazione data: dunque il rapporto delle ordinate, che nei predetti punti d' in-

con-

contro corrispondono alle ascisse respettive, è lo stesso che quello, il quale vien espresso dall' equazione proposta, e per conseguenza &c.

1239. Il principio esposto è generale, ma per poterne far uso con sicuro successo, due sono le cose da osservarsi.

1.ª La prima è che siccome le intersezioni delle curve rappresentate dall' equazioni ipotetiche, possono incontrarsi in meno, ò in più punti, che non sono le radici dell'equazione proposta; ò ancora non incontrarsi in verun punto; è necessario, che una dell' equazioni indeterminate si scelga tale, che una dell' incognite non abbia in essa potenza maggiore della prima. In questa maniera ciascuna ordinata, espressa dalla suddetta incognita lineare, corrispondente ai punti d' intersezione delle due curve, non può mai essere immaginaria; e dovendo corrispondere a ciascun' ascissa reale un' ordinata parimente reale, i punti d' intersezione mentovati non possono esser nè più, nè meno delle radici componenti l' equazione data. (Intorno a questo si può consultare Hermann nell' Osser. sulli Sched. di Rolle; il Tomo 3.° dei Miscell. di Berl. pag. 131, e M. Cramer Analyse des Courbes pag. 86.)

Si avverta però che l' artifizio indicato non è punto necessario, qualora sappiasi che, facendo uso di un' opportuna costruzione, le due curve rappresentate dall'equazioni ipotetiche, possano incontrarsi in tanti punti, e non più, quante sono le radici dell' equazione data.

2.ª La seconda osservazione che si dee fare sul Principio addotto, è, che l'equazioni ipotetiche sieno tali che il prodotto del massimo loro esponente

te sia eguale al massimo esponente dell' equazione data; e che nel tempo stesso rappresentino delle curve, non tanto di un' ordine semplice, più che sia possibile, quanto facili ad esser descritte; perchè non è l' astratta semplicità delle curve da costruirsi, ma bensì la pratica facilità della loro descrizione, che dee somministrar le radici richieste (Si può consultar quì Giac. Bernoulli pag. 689.; Neuwton *Aritm. univ.* pag. 286; M. de l' Hòpital Sect. Coniques pag. 348, e Stirling, *lineæ tertii Ord.* pag. 59.)

1240. *Probl.* Dato un angolo dividerlo in tre parti eguali.

Soluzione. Sia dato l' angolo NCL (Fig.ª 96.). Fatto centro in C si descriva il circolo $N2TL$, e si supponga l'angolo dato diviso in tre parti eguali $NC2$, $2CT$, TCL. Si conducano le corde $N2$, $2T$, TL, ed NL; e dal punto 2 la retta $2S$ parallela al raggio CT. Si vede facilmente, che i triangoli $NC2$, $2CT$, TCL, $NR2$, $S2R$, MTL sono tutti simili, ed isosceli, e che i triangoli $NR2$, LMT sono eguali, e simili.

Si ponga pertanto il raggio $CN = 1$, $NL = a$ ed $N2 = x$, e si avrà per i triangoli $NC2$, $NR2$, $S2R$... $1 : x :: x : 2R = \frac{x^2}{1} = x^2$, ed inoltre $x : x^2 :: x^2 : RS = \frac{x^4}{x} = x^3$; Ma l' isoscelismo de' triangoli divisati dà $NL + RS = N2 + 2T + TL$; dunque $a + x^3 = 3x$, e perciò $x^3 - 3x + a = 0$

Per costruire quest' equazione, descrivo (Fig.97) una Parabola, di cui il parametro sia $= CN = 1$; Sopra l' asse AO prendo una parte $AC = \frac{CN}{2} = \frac{1}{2}$

poscia prendo $CD = 3\mathcal{A}C = \frac{3}{2}$, Sul punto D inalzo la perpendicolare $DE = \frac{a}{2}$, e fatto centro in E, con un raggio $= \mathcal{A}E$ descrivo un circolo, il quale deve incontrare il perimetro Parabolico nei punti $\mathcal{A}$, F, G, g, quindi conduco le ordinate FL, GH, gf, ed i raggi $E\mathcal{A}$, Eg, e la retta EM parallela all' asse, e prolungo la gf in M. Fatto questo, pongo $gf = x$ e siccome si ha $AD = \mathcal{A}C + CD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, $ED = \frac{1}{2}a$, $\mathcal{A}E^2 = 4 + \frac{1}{4}a^2$; $fg^2 = CN.\mathcal{A}f$, cioè $x^2 = 1.\mathcal{A}f.$; $fD = AD - \mathcal{A}f = 2 - x^2 = EM$, $gM = gf + fM = gf + ED = x + \frac{1}{2}a$, $Eg^2 = 4 - 3x^2 + x^4 + ax + \frac{1}{4}a^2$; a motivo che $\mathcal{A}E^2 = Eg^2$, ne segue che sia $4 + \frac{1}{4}a^2 = 4 - 3x^2 + x^4 + ax + \frac{1}{4}a^2$, cioè $x^3 - 3x + a = 0$. Dunque l' ordinata gf è uguale $\mathcal{Q}N$ corda della terza parte dell' arco dato, che è ciò che si cercava.

E' facile a vedersi, che l' ordinata GH è la corna della terza parte dell' arco supplementario, e che FL è una radice negativa di nessun uso.

1241. *Probl.* 2.° Dato un cubo, trovarne un altro, che stia al cubo dato in una data ragione.

Soluzione. La ragione data essendo espressa per $m : n$ si cerchino due medie proporzionali geometriche fra m ed n, onde sia $m : x : y : n$: si avrà

x^3

$x^2 = my$, ed $y^2 = nx$, che sono due equazioni Parboliche. Per evitar però la costruzione di due Parabole osservo che sommando le due suddette equazioni si ha $x^2 + y^2 - nx - my = 0$, che è un' equazione del circolo. Di fatto, ponendo $x - \frac{1}{2}n = u$, ed $y - \frac{1}{2}m = z$ si ha la trasformata $u^2 + z^2 = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2$.

Si faccia $\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2 = p^2$, e si avrà trasponendo $u^2 = p^2 - z^2$, equazione che appartiene manifestamente al circolo.

Venghiamo alla costruzione

Si descriva (Fig. 98.) una Parabola AM col parametro n sull' asse $A\mathfrak{Q}$; questa sarà il luogo geometrico dell' equazione $y^2 = nx$.

Per determinare il luogo dell' equazione circolare $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2$, si trasformi in modo che diverga $u^2 + z^2 = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2$, a tenore di ciò, che si è detto di sopra; quindi s' inalzi la perpendicolare $AB = \frac{1}{2}m$; per B si conduca la BCR parallela all' asse $A\mathfrak{Q}$; su di questa prendasi una parte

te $BC = \frac{1}{2}n$, e si descriva un circolo col raggio CA; Sarà esso il luogo geometrico dell' equazione $x^2+y^2-mx-ny=0$, e taglierà per conseguenza la Parabola in un punto M tale, che conducendo l'ordinata PM, saranno AP, PM le due medie cercate. Trovate queste si avrà $m^3 : x^3 :: m:n$, il che è ciò che si voleva.

Si vede facilmente, che in questo si comprende il celebre Probl. della duplicazione del cubo, proposto dall' Oracolo di Delo, come il solo mezzo, per cui potesse quell' Isola esser liberata dalla pestilenza, e su di cui per consiglio di Platone tutti sudarono i Matematici della Grecia.

ANALISI

PARTE V.

CAPITOLO III.

Dell' Analisi Algebrica indeterminata in generale.

1242. Quando in un problema il numero delle incognite supera di un'unità quello delle condizioni, esso dicesi indeterminato. Se il numero dell' incognite superi quello delle condizioni di più unità, il problema è più che indeterminato. In questi casi operando sull' equazioni, che provengono dalle condizioni date, coi Metodi dell' Analisi Determinata, si giunge necessariamente ad un' equazione finale, che racchiude più d' un' incognita, e si possono avere per conseguenza infinite soluzioni. I problemi indeterminati presi sotto quest' aspetto, non presentano veruna difficoltà, perchè vi si può soddisfare in qualsivoglia modo. Ordinariamente però si vogliono le soluzioni in numeri interi, e questi positivi, ò in numeri razionali solamente. Queste condizioni, che restringono i problemi indeterminati dentro opportuni confini, esse sono, che loro danno quell' aria d'importanza, che non avrebbero altrimenti. Noi perciò gli tratteremo sempre con qualche restrizione, e così la nostra Analisi Indeterminata verrà ad abbracciare, secondo il sentimento del Conte Vincenzo Riccati (Giornale de letterati T. 15.), anche l'Analisi, che *Semideterminata* si appella.

1243. *Scol.* Il primo Autore che abbia trattato di questo difficil ramo di Analisi è Diofanto Alessandrino. Le di lui scarse Teorie rimasero nei loro angusti confini per 12 secoli incirca, finchè nel secolo 16. M. Bachet de Meziriac diede alla luce un bel Commento sulle Opere di Diofanto. Entrarono in seguito in questo campo Fermat, Cartesio, Frenicle, Wallis, Saunderson, ed in appresso il grand' Eulero, il quale aggiunse delle ricerche assai vantaggiose, e delle dimostrazioni meno ristrette, come si può vedere nel 2.° T. della sua Algebra, e in diverse Memorie inserite negli Atti dell' Acc. di Pietroburgo. Tuttavolta però è forza confessare, che i tentativi, ed i travagli di questi sommi Analisti (che che significar voglia la dissimulazione di M. d' Alambert, *Encycl. Method. T. II. Mathem. art. Indeterminée*), riuscirono infecondi, e superficiali a segno, che il loro principal merito si può forse dir quello, di aver risvegliato il genio originale, ed incomparabile, dei M. de la Grange.

SEZIONE I.

Della Soluzione dei Problemi Algebrici Indeterminati di primo grado.

1244. L'equazione generale de' problemi algebrici indeterminati di primo grado è $px \pm qy = \pm r$. Se le soluzioni possano essere indifferentemente in numeri interi, ò fratti, positivi, ò negativi, si deduca il valore di un' incognita, per es.° di x, e si avrà $x = \frac{\pm r \mp qy}{p}$, e per avere tutte le

possibili soluzioni, non si avrà che da sostituire nel secondo membro tutti gl' infiniti valori che può ricevere y.

1245. Ma se le soluzioni si vogliano in numeri interi, e questi debbano essere positivi, i valori di x, e di y vengono ristretti dentro certi limiti. Vediamo in generale come questi possano determinarsi.

Si richiami la formola generale $px \pm qy = \pm r$, e combinando i segni si avranno le quattro formole seguenti

$$x = \frac{r-qy}{p}, \quad x = \frac{r+qy}{p}, \quad x = -\frac{r-qy}{p}, \quad x = \frac{-r+qy}{p}$$

Ora per mezzo di queste si vede, che se le soluzioni debbano essere in numeri interi, ciascuna delle suddette formole dev' esser tale, che il numeratore sia divisibile per p; e che qualora le soluzioni debbano essere in numeri positivi, dev' essere nella 1.ª formola $r > qy$, nella 3.ª p negativa, e nella 4.ª $qy > r$. Oltre di questo è facile a dimostrarsi, che i valori da sostituirsi per y si debbon contenere fra o, e $p-1$ inclusivamente. Di fatto pongasi nell'equazione $x = \pm\frac{r \mp qy}{p}$, $y = 0 = 1 = 2$ &c e si avrà $x = \pm\frac{r}{p}$,

$x = \pm\frac{r \mp q}{p}$, $x = \frac{r \mp 2q}{p}$ &c. $x = \pm\frac{r \mp pq}{p} = \pm\frac{r}{p} \pm q$

Facendo $y = p+1 = p+2$ &c. $= 2p$ si trova .....

$x = \pm\frac{r \mp q}{p} \mp q$, $x = \pm\frac{r \pm 2q}{p} \mp q$ &c. $x = \pm\frac{r}{p} \mp 2q$.

Ecco per tanto, che i risultati, i quali si ottengono con sostituire per y dei valori $> p-1$ fino a $2p$, non differiscono dagli antecedenti, che della detta quantità q. Così proseguendo si troverebbe che il terzo periodo

di

di risultati, differisce dal secondo della stessa quantità q, e così in seguito. Quindi ne segue per tanto, che conoscendo i risultati del primo periodo, si conoscono quelli ancora dei periodi successivi, onde anche senza il soccorso della formola, e colla scorta de' limiti divisati, si posson calcolare con facilità tutte le soluzioni successive del problema proposto. Venghiamo alla soluzione generale.

1246. Sia l'equazione $px \pm qy = \pm r$, in cui p, q sieno numeri interi, e primi fra di loro. Dico interi, perchè si suppongono tolte le frazioni; e dico primi fra di loro, perchè se avessero un comun divisore k, r dovrebb'esser divisibile per k, à motivo che le soluzioni debbono essere in interi; per conseguenza k svanirebbe per la divisione, e p, e q diverrebbero primi. Posto questo, per ottenere le soluzioni richieste, si sciolga $\frac{q}{p}$ in frazione continua, e sia $\frac{q'}{p'}$ la frazione equivalente all'intera frazione continua, diminuita dell' ultimo termine. Sarà (*n.* 390) $p'q - pq' = \pm 1$. Si moltiplichi quest' equazione per r, onde sia $p'qr - q'pr = \pm r$; questa si aggiunga, o si tolga dalla proposta, e si avrà $p(x \pm rq') - \ldots\ldots q(\pm y \mp rp') = 0$. Di qui si dedurrà $\frac{x \pm rq'}{y \pm rp'} = \frac{q}{p}$, ò ancora $\frac{x \pm rq'}{y \pm rp'} = \frac{mq}{mp}$. Dunque $x \pm rq' = mq$, ed $y \pm rp' = mp$, e finalmente $x = mq \mp rq'$, ed $y = mp \mp rp'$, m potendo essere un numero intero qualunque.

1247. *Scol.* Non volendo far uso del Metodo esposto, si potrebbe ottenere l' intento, con cer-

care una soluzione sola colla scorta de' limiti 0, $p-1$; poichè detto p' il valor di x, e q' il valor d'y, si avrebbe $pp' \pm qq' = \pm r$, e togliendo questa dalla formola generale $px \pm qy = \pm r$, si avrebbe $p(x-p') \pm q(y \mp q') = 0$, e quindi $x = \mp mq + p'$, ed $y = mp \pm q'$; dove non resta che sostituire per m qualunque numero intero.

1248. Ecco per tanto come una soluzione sola apre la strada a tutte le altre. Questo principio ben lo conobbe l'Eulero, e perciò nei suoi Metodi suppose cognita una soluzione, e si occupò nella ricerca delle altre: passo poco interessante, e che lasciò l'Analisi indeterminata nella stessa povertà di Metodi diretti, e generali.

Per applicare adesso il Metodo esposto, sia

1249. *Probl.* Si dimandano due numeri interi, tali che se dal triplo di uno si tolga il quadruplo dell'altro, il residuo sia sempre uguale à 5.

Soluzione I. Per dare una soluzione compita di questo problema, convien determinare tutti i valori interi positivi di x, y, atti a soddisfare all'equazione $3x-4y=5$. A quest'effetto deduco dalla frazione $\frac{q}{p} = \frac{4}{3}$ la frazione continua $1 + \frac{1}{3}$; da questa levo l'ultimo termine $\frac{1}{3}$ ed ho $\frac{q'}{p'} = 1$, vale a dire $q' = 1$, e $p' = 1$.

Dunque $x = mq \mp rq' = m.4 \mp 5$, ed $y = mp \mp rp' = m.3 \mp 5$: si prendano i segni negativi, e si faccia $m = 2 = 3$ &c., e si avrà $x = 3 = 7 = 11 = 15 = 19$ &c. ed $y = 1 = 4 = 7 = 10 = 13$ &c., di dove si vede, che i valori di x procedono in progressione arimmetica, di cui la ragione è $= 4$; e che i valori d'y pro-

ce-

cedono in progressione arimmetica di cui la ragione è =3.

Soluzione II. Volendo far uso dell' artifizio esposto nello Scolio precedente, si deduca $x=\frac{5+4y}{3}$; si cerchi uno de' valori in y per mezzo de' limiti 0, e 2, e si troverà che $y=1$ dà $x=3$; quindi $p'=3$, e $q'=1$ (*n.* 1268). Si faccia la sostituzione di p, e q nell' equazione $pp'\pm qq'=\pm r$ e si avrà $3p'\pm 4q'=5$. Si tolga questa dall' equazione $3x-4y=5$, e il residuo sarà $3(x-p')-4(y\mp q')=0$. Di qui $\frac{x-p'}{y\mp q'}=\frac{4}{3}=\frac{m.4}{m.3}$, e perciò $x=m.4+p'$ ed $y=m.3\pm q'$, ò sia, $x=m.4+3$, ed $y=m.3+1$. Si diano ad m tutti i valori possibili in numeri interi, e si avrà come sopra $x=3=7=11$ &c. $y=1=4=7$ &c.

1250. *Scol.* Siccome si vide che i diversi periodi di quozienti, che esprimono i valori di x, e d'y non differivano fra di loro respettivamente, che del coefficiente dell'incognita, su cui facevasi l' operazione, si può uno dispensare di dedurre la formola generale, e basta, che al valore d'y che è 1, si aggiunga successivamente il suo coefficiente 3; e si pratichi lo stesso per rapporto ad x. Questo però non è che un mero artifizio, soggetto à tentativo, e non è da paragonarsi col Metodo diretto, e generale che abbiamo esposto.

Passiamo adesso ai problemi algebrici indeterminati di 2.° grado.

SE-

SEZIONE II.

Della Soluzione dei problemi indeterminati di 2.° grado.

1251. La formola generale dell' equazioni di questo genere è $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+K=0$, dove ..... a, b, c, &c. K sono numeri interi dati, o positivi, o negativi: e se non fossero interi, sarebbe facile il farli divenir tali, con trasformare opportunamente l'equazione.

1252 Nell' addotta formola vi si contengono sei equazioni diverse di secondo grado; questo si vede chiaro supponendo successivamente ..... $a=0$, $b=0$, $c=0$, $(a=0, b\geq 0)$ $(a=0, c\geq 0)$, $(b=0, c=0)$, sapendosi che il termine xy rende quadratica un' equazione.

Se dunque giungasi a risciogliere l' addotta formola, si scioglieranno nel tempo stesso tutte l' equazioni quadratiche, contenute nella medesima, vale a dire tutte l'equazioni quadratiche possibili. Ottenuto questo, non solo potrà evitarsi ogni vil tentativo, ma si avrà in oltre il vantaggio di non dover cangiar modo di calcolare per ogni equazione quadratica che si presenti. Ecco il calcolo che fa d' uopo seguire.

1253. Richiamata la formola ..... $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+K=0$. Da questa si deduca il valor di x, e si avrà ..... $x+\left(\frac{by+d}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{(by+d)^2}{4a^2}-\frac{(cy^2+ey+K)}{a}}$ ò sia $2ax+by+d=\pm\sqrt{(by+d)^2-4a(cy^2+ey+K)}$. Ecco ridot-

dotta la questione a determinare y in modo, che la funzione sotto il radicale divenga un quadrato.

Sia per tanto $By^2+2fy+g=t^2$, posto ..... $B=b^2-4ac$, $f=bd-2ae$, e $g=d^2-4aK$. Risciogliendo si ha $By+f=\sqrt{Bt^2+f^2-Bg}$, onde non si tratta più che di render quadrata la funzione Bt^2+f^2-Bg. Sia $f^2-Bg=A$, e tutto si ridurrà à soddisfare generalmente all' equazione $A+Bt^2=u^2$, A, e B, essendo numeri interi dati, e t, ed u dovendo esser numeri razionali.

1254. Prima di proceder più oltre, si osservi, che siccome si è supposto ..... $(by-d)^2-4a(cy^2+ey+K)=By^2+2fy+g=t^2$ si ha per conseguenza $2ax+by+d=\pm t$; e che essendosi supposto $Bt^2+f^2-Bg=Bt^2+A=u^2$, dev' essere $By+f=\pm u$. Da tutto questo dee risultare .... $x=\frac{\pm t-d}{2a}+\frac{b(\pm u-f)}{2aB}$, ed $y=\pm\frac{u-f}{B}$, equazioni dalle quali si determinano x, ed y, conosciuti che siensi t ed u. E' manifesto poi, che se x, ed y debbano essere quantità intere, dovranno esser tali, t, ed u parimente, e converrà in oltre che $\frac{\pm t-d+b(\pm u-f)}{B}$ sia divisibile per $2a$, e che $\pm u-f$ sia divisibile per B. Volendo che x ed y fossero razionali soltanto basterebbe che t, ed u fossero tali.

1255. Prima di entrare nella soluzione generale dell' equazione $A+Bt^2=u^2$, alla quale abbiamo veduto ridursi quella dell' equazione generale di secondo grado, dee riuscir vantaggioso trattenerci ad esaminare due casi particolari assai estesi, nei quali l' equazione generale suddetta si può sciogliere con alcuni

cuni artifizj più semplici e spediti dello stesso metodo generale, che siamo per esporre; e dei quali se ne può far uso utilmente nella pratica, Questi artifizj che debbonsi in origine a Diofanto, ed a *M.* Bachet, hanno per oggetto il ridurre un' equazione quadratica indeterminata ad un' equazione di primo grado, e questo, ò con togliere mediante opportune sostituzioni le potenze seconde, o con togliere i radicali senza inalzar l' equazione.

1256 *Caso I.* Se nell' equazione generale si abbia la funzione b^2-4ac eguale ad un quadrato, si otterrà la soluzione col seguente artifizio. Essendo ..... $b^2-4ac=B=$ quadrato$=\pi^2$, nell' equazione ..... $A+Bt^2=u^2$, o sia $A+\pi^2t^2=u^2$, si ponga $u=\pi t+z$, e ne risulterà la trasformata $A=2btz+z^2$, da cui si deduce $t=\frac{A-z^2}{2bz}$ equazione à cui soddisfasi con qualunque valore di z.

1257. Se vogliansi però dei valori interi per t, ed u, z dovrà essere intero, ed $A-z^2$ divisibile per abz, lo che limiterà il numero delle soluzioni. Ecco il metodo onde potere in questi casi determinare il numero delle soluzioni possibili. Dall' equazione $A+\pi^2t^2=u^2$ si deduce $A=(\pi t+u)(\pi t-u)$. Di qui si vede che $\pi t+u$, e $\pi t-u$ debbon esser due fattori di A; si sciolga dunque A in due fattorj in tutti i modi possibili; uno di essi pongasi $=\pi t+u$, e questo sia il maggiore, e l'altro $=\pi t-u$; si avranno così due equazioni, che somministreranno due valori, uno per t, e l'altro per u, e di queste coppie di valori se ne avranno tante, quante sono le coppie di fattori, nei quali è risolubile A. Fra tutti questi valori non si avrà che da scegliere quelli che sono numeri interi.

1258. A questo caso, si vede che può richiamarsi

si la soluzione dell' equazione $am^2 = x^2 - y^2$, la quale sarà il punto di appoggio del Metodo che esporremo; di fatto si ha in essa $b^2 - 4ac = E = 4$ quadrato. A motivo però che l' omogeneo am^2 comprende un quadrato, per ottenerne delle soluzioni generali in numeri interi, convien servirsi del metodo seguente.

1259. Si ponga $am^2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = rt$, dove sia $r = x + y$. Si avrà $t = \frac{am^2}{r}$, e perciò dovrá essere am^2 divisibile per r. Il massimo divisore di a, ed r sia P, onde si abbia $a = PQ$, $r = PR$, Q, ed R essendo primi fra di loro; sará $t = \frac{Qm^2}{R}$, e però $m^2 = \frac{Rt}{Q}$; ma m dev' essere per ipotesi un numero intero; dunque $\frac{t}{Q} = S$, ed $m^2 = RS$. Si avrà così $t = QS$, essendo P, e Q due fattori qualunque di a. Sia s il massimo divisor comune di R, e di S; dovendo essere RS un quadrato, R ed S non possono essere che della forma $R = sg^2$, $S = sf^2$, essendo s, g, f numeri interi. Quindi si avrà .. $m^2 = s^2g^2f^2$, ed $m = sgf$, $r = x + y = PR = Psg^2$, ... $t = x - y = QS = Qsf^2$, d' onde si ha finalmente .... $x = s\frac{(Pg^2 + Qf^2)}{2}$; $y = s\frac{(Pg^2 - Qf^2)}{2}$. Siccome poi è inutile avere un fattor comune nell' espressione dei valori di x, ed y, pongasi $s = 2$, e si avrà in fine $m = 2gf$, $x = Pg^2 + Qf^2$, $y = Pg^2 - Qf^2$. Per g, ed f si prendano quei valori interi che si vogliono, e per P, Q, due fattori qualunque di

a,

a, compresa fra questi l'unità, e quante saranno le maniere di divider a in due fattori, altrettanti saranno i diversi valori di x, e di y.

1260. *Caso* II. Se nell'equazione generale si abbia la funzione $(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4aK)$ eguale ad un quadrato, si otterrà parimente la soluzione con molta facilità. Di fatto la suddetta funzione è $=A$; ora facendo $A=\lambda^2$, l'equazione finale diverrà $\lambda^2+Bt^2=u^2$. Pongasi..... $u=\lambda+tz$, e si avrà $Bt^2=2tz+t^2z^2$, di dove si deduce $t=\frac{2\lambda z}{B-z^2}$, espressione, in cui si possono sostituire per z que' valori che si vogliono. Si dee solamente avvertire, che se t, ed u debbano esser numeri interi, bisogna che z sia numero intero, e che $2\lambda z$ sia divisibile per $B-z^2$.

Si può peraltro usare anche il seguente artifizio. Nell equazione $\lambda^2+Bt^2=u^2$ si trasponga onde si abbia $Bt^2=u^2-\lambda^2=(u+\lambda)(u-\lambda)$. Si divida B in due fattori razionali, in tutti i modi possibili. Il minore moltiplicato per t si ponga $=u-\lambda$; e il maggiore moltiplicato per t si ponga $=u+\lambda$. Formate così tutte le coppie possibili di equazioni, si avranno tutti i valori di t, ed u, fra i quali si dovranno sceglier quelli, che soddisfanno all'equazione $\lambda^2+Bt^2=u^2$, e resterà completamente sciolto il problema.

1261. Si concluda da tutto questo, che essendo proposto un problema indeterminato di secondo grado, si debbon fare le sostituzioni dei valori di A, e di B, per vedere se uno di essi risulti un quadrato, onde potere in tal caso procedere alla soluzione, cogli artifizj indicati.

1262. Si danno però dei problemi, che sebbene riducansi ai casi de'quali abbiamo parlato, nondimeno si sciolgono più semplicemente con altri artifizj, proprj di ciascuno di essi, per i quali si evita la molestia delle sostituzioni. Vediamone qualche esempio.

1263. *Problema* 1.° Si dimandano due numeri tali, che il quadrato del primo aggiunto al secondo numero, formi un quadrato, e che il quadrato del secondo numero aggiunto al primo, formi parimente un quadrato.

Soluzione. Per le condizioni date si ha ..... $x^2+y=m^2$, $y^2+x=n^2$. Ad oggetto però di ottenere delle soluzioni razionali, giova porre ..... $x^2+y=(p-x)^2$, ed $y^2+x=(q-y)^2$, p, e q essendo due indeterminate. Fatte le operazioni, si trova $y=p^2-2px$, $x=q^2-2qy$; e sostituendo il valor di y, $x=q^2-2q(p^2-2px)$, onde si ha ..... $x=\frac{q^2-2qp^2}{1-4pq}=\frac{2qp^2-q^2}{4pq-1}$, e perciò $y=\frac{2pq^2-p^2}{4pq-1}$ e non rimane, che sostituire per p, e q tutti i valori possibili, per ottenere tutte le possibili soluzioni del problema.

1264. *Problema* 2.° Trovar due numeri tali, che la somma de' loro quadrati, più il rettangolo del primo in una quantità data, formi un quadrato.

Soluzione. Si ha per le condizioni ..... $x^2+y^2+ax=m^2$; pongasi $m=y+q$, e si avrà .. $x^2+ax=2yq+q^2$; quindi $y=\frac{x^2+ax-q^2}{2q}$, di dove per qualunque valore di x, si ha sempre per y un valor razionale.

1265. *Problema* 3.° Rottosi un grand' albero sulla

sulla riva di un picciol fiume, il suo tronco servì di ponte ai passeggieri. Vi passò per accidente un geometra, e per dar notizia della larghezza del fiume, e della lunghezza dell'albero caduto, disse che il quadrato della lunghezza del tronco era eguale ai quadrati della lunghezza del resto dell'albero, e della larghezza del fiume. Come si posson dedurre da queste condizioni le predette grandezze?

LEMMA

Se abbiansi due potenze a^m, b^m, dico, che $a^m b^m$, ed $\frac{a^m}{b^m}$ saranno potenze dell'ordine stesso.

Dimostrazione. Pongasi $b = \frac{c}{a}$, e sarà $a^m b^m = c^m$; pongasi, $b = \frac{a}{c}$, e si avrà $\frac{a^m}{b^m} = c^m$.

Soluzione. Sia adesso y la lunghezza del tronco rimasto, x la larghezza del fiume, ed m la lunghezza del tronco caduto. Si avrà secondo il geometra $x^2 + y^2 = m^2$. Quest'equazione divisa per x^2, ci dà $1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{m^2}{x^2} = n^2$, ed $\frac{y^2}{x^2} = n^2 - 1$, onde $\frac{y}{x} = \sqrt{n^2 - 1}$. Per ridurre quest'espressione alla razionalità, si richiami la formola (*n.* 197), e pongasi $n = \frac{1+z^2}{-2z}$, cioè $n^2 = \frac{1+2z^2+z^4}{4z^2}$. Si avrà $\sqrt{n^2-1} = \frac{1-z^2}{-2z} = \frac{z^2-1}{2z}$; dunque $y = z^2 - 1$ ed $x = 2z$. Si diano a z quei valori che si vogliono, e si avran-

avranno sempre dei risultati soddisfacenti alla questione proposta, perchè si ha sempre ..... $(z^2-1)^2+(2z)^2=$ quadrato, equazione di condizione costituente il problema. Si faccia per esempio $z=3$ e sarà $y=8$, $x=6$, quindi ..... $x^2+y^2=64+36=100=m^2$; $m=10$, $y+m=18$ lunghezza totale dell' albero, ed $x=6$ larghezza del fiume.

1266. Volendo sperimentare l'artifizio del Caso 1.°, nell'equazione $x^2+y^2=m^2$, si ponga $x=m-ty$ e si avrà la trasformata $y^2-2mty+t^2y^2=0$, e perciò $y=\frac{2mt}{t^2+1}$. Si prendano per m, e per t que' valori che si vogliono, purchè però $\frac{2mt}{t^2+1}$ risulti numero intero, e si otterranno tutte le soluzioni possibili. Pongasi per esempio $t=2$, ed $m=5$, sarà $y=4$, quindi $y+m=9$ lunghezza di tutto l'albero, ed $x=3$ larghezza del fiume; di fatto $3^2+4^2=5^2$.

1267. Ritornando adesso in cammino, entriamo nella soluzione generale dell' equazione ..... $A+Bt^2=u^2$. Prima ne cercheremo la soluzione in numeri razionali fratti, e di poi faremo passaggio a risolverla in numeri razionali interi.

1268. Sieno $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ due frazioni ridotte ai minimi termini, e al medesimo denominatore; e sia $\frac{p}{r}=u$, e $\frac{q}{r}=t$. Sostituendo questi valori, l'equazione $A=u^2-Bt^2$ diviene $Ar^2=p^2-Bq^2$, e la questione vien ridotta a trovare tutti i valori interi di p, q ed r, i quali soddisfacciano alla suddetta equa-

equazione; p, e q dovendo esser primi fra di loro, altrimenti Ar^2 dovrebb' esser divisibile per il comun fattore quadrato di p, e q; e con ciò $\frac{p}{r}$, e $\frac{q}{r}$ non sarebbero ridotti ai minimi termini.

1269. Prima però d' intraprendere la proposta soluzione, convien ristringere il problema in alcuni confini più precisi, colle condizioni seguenti.

Condizione I. A, e B non debbon esser quadrati, nè contenere alcun fattor quadrato. Di fatto, se questo non avesse luogo, detto ρ^2 il fattor quadratico incluso nel valore di A e π^2 il fattor quadratico, incluso nel valore di B, onde si avesse $A = k\rho^2$, e $B = K'\pi^2$ e l'equazione $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ fosse della forma $K\rho^2 r^2 = p^2 - K'\pi^2 q^2$, basterebbe porre $\rho r = m$, e $\pi q = n$, e la suddetta equazione si trasformerebbe in $Km^2 = p^2 - K'n^2$, la quale è della medesima forma che l' equazione $Ar^2 = p^2 - Bq^2$.

Condizione. II. B non dev' essere $= 1$. La ragione di questo è che essendo $B = 1$, l'equazione finale diviene della forma $am^2 = x^2 - y^2$, della quale si ha la soluzione generale (*n*: 1269)

Condizione III. Non deve essere $A = 1$, e $B = -1$ nel medesimo tempo, perchè questo è un caso troppo semplice, e risolubile con uno degli artifizi, esposti dove si trattò il caso 1.° e 2.°

Condizione IV. Neppure dev' essere $A = \pm B$; perchè l' equazione diverrebbe $A \pm At^2 = u^2$, e facendo $u = \frac{Ap}{r}$, e $t = \frac{q}{r}$, $Ar^2 \pm Aq^2 = A^2p^2$, o sia $r^2 \pm q^2 = Ap^2$; equazione, in cui avendo luogo il segno superiore, si ha il caso escluso nella condizione precedente, cioè $A = 1$, e $B = -1$; e se abbia

bia luogo il segno inferiore, si ha un' equazione simile ad $am^2=x^2-y^2$, della quale si ha una general soluzione.

Dovendo per tanto essere uno dei coefficienti A, B maggiore dell' altro, si potrà supporre generalmente $A>1$, e perciò $>B$.

Condizione V. A dev' esser divisore di un numero della forma α^2-B, α essendo un numero intero. Eccone la ragione.

Ambedue i membri dell'equazione $Ar^2=p^2-Bq^2$ salva la sua costituzione, si possono moltiplicare per una medesima quantità qualunque, e perciò anche della forma $p^2-Bq'^2$. Con questo si ha la trasformata $Ar^2(p'^2-Bq'^2)=(p^2-Bq^2)\times(p'^2-Bq'^2)$ ..... $=(pp'\pm Bqq')^2-B(pq'\pm qp')^2$. Siccome poi sono p, e q numeri primi fra di loro, si possono prender sempre per p', e q' dei numeri tali, che sia ..... $pq-qp'=\pm 1$: $pp'\pm Bqq'$ si può sempre fare $=\alpha$; si può avere per conseguenza $Ar^2(p'^2-Bq'^2)=\alpha^2-B$ generalmente, e perciò, A può esser sempre divisore di un numero della forma α^2-B, perchè..... $r^2(p'^2-Bq'^2)$ è sempre una quantità intera.

1270. Ecco per tanto, che la questione si riduce a sciogliere l'equazione $Ar^2=p^2-Bq^2$, in modo, che p, q, r sieno numeri razionali interi, e p e q sieno primi fra loro: supposto che A, e B sieno numeri interi non quadrati, nè comprendenti alcun fattore quadratico, che non sia $B=1$; che non sia $A=1$, e $B=-1$, che non sia $A=\mp B$; e che finalmente A sia divisore di un numero della forma α^2-B.

LEMMA I.

1271. Il prodotto di un qualunque numero di quantità della forma $p^2 - Bq^2$ risulta sempre della medesima forma.

Dimostrazione. Di fatto, $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = (pp' \pm Bqq')^2 - B(pq' - qp')^2 = P^2 - BQ^2$: nel modo stesso, ponendo $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - BQ^2$, si trova $(p^2 - Bq^2)(p'^2 \pm Bq'^2)(p''^2 - Bq''^2) = P'^2 - BQ'^2$, e così in seguito.

LEMMA II.

1272. $\frac{\mathcal{A}}{2}$ può sempre supporsi $> \alpha$, e perciò si può prender sempre per α un numero $< \frac{\mathcal{A}}{2}$.

Dimostrazione. Sapendosi che $\mathcal{A}$ dev' esser divisore di un numero della forma $\alpha^2 - B$, supponsi, esser K un numero tale, che $K^2 - B$ sia divisibile per $\mathcal{A}$. Facendo $\alpha = \mu\mathcal{A} \pm K$, μ essendo un numero qualunque, $\alpha^2 - B$ sarà egualmente divisibile per $\mathcal{A}$, qualunque sia μ, e il segno di K. Si determini dunque μ, e il segno di k in modo, che α sia $< \frac{\mathcal{A}}{2}$: e siccome questo è sempre possibile, si può concludere che se esiste un numero qualunque K tale che $k^2 - B$ sia divisibile per $\mathcal{A}$, dee parimente esistere un numero $\alpha < \frac{\mathcal{A}}{2}$, che abbia la medesima proprietà.

1273. Richiamata adesso l'equazione $\mathcal{A}r^2 = p^2 - Bq^2$

$-Bq^2$ . . . . (*A*) si vede che per risciogliera, basta ridurne la soluzione ad un' equazione, che si sappia sciogliere, per es.° all'equazione $am^2=x^2-y^2$

A quest' effetto si dee cominciare da investigare un numero $\alpha < \frac{\mathcal{A}}{2}$; tale che $\frac{\alpha^2-B}{\mathcal{A}} = \mathcal{A}'$, cioè che $\alpha^2-B=\mathcal{A}\mathcal{A}'$. Se questo numero non si potesse trovare, sarebbe certo che il problema non ammetterebbe soluzione in numeri razionali ; verità facile a concepirsi, con riflettere sul Metodo tenuto per provare che $\mathcal{A}$ debba essere divisor di un numero della forma α^2-B.

1274. Supponga si trovato il numero α dotato delle divisate condizioni: facciasi $\alpha=\mu'\mathcal{A}\pm\alpha$, μ essendo un numero qualunque, e si determini μ, e il segno ambiguo di α, in modo che si abbia $\alpha' < \frac{\mathcal{A}'}{2}$, il che é sempre possibile, se l' equazione proposta sia solubile in numeri razionali. Siccome poi α^2-B è divisibile per $\mathcal{A}'$, lo sarà pure α'^2-B ; il quoto ne sia $\mathcal{A}''$, e si avrà $\mathcal{A}'\mathcal{A}''=\alpha'^2-B$. Si ponga $\alpha''=\mu''\mathcal{A}''\pm\alpha'$, $\alpha'''=\mu'''\mathcal{A}'''\pm\alpha''$ &c. &c. e si prendano μ'', μ''' &c. ed i segni ambigui in maniera, che si abbia $\alpha'' < \frac{\mathcal{A}''}{2}$, $\alpha''' < \frac{\mathcal{A}'''}{2}$ &c. &c. e si avranno l' equazioni $\mathcal{A}''\mathcal{A}''' = \alpha''^2-B$, ... $\mathcal{A}'''\mathcal{A}^{IV}=\alpha'''^2-B$ &c. &c., cioè si avrà la serie di equazioni

$$(a)\quad \begin{cases} AA^{I} = \alpha^{2} - B \\ A^{I}A^{II} = \alpha^{I2} - B \\ A^{II}A^{III} = \alpha^{II2} - B \\ A^{III}A^{IV} = \alpha^{III2} - B \\ \text{\&c. = \&c.} \end{cases}$$

nelle quali $\alpha < \frac{A}{2}$, $\alpha^{I} < \frac{A^{I}}{2}$, $\alpha^{II} < \frac{A^{II}}{2}$ $\alpha^{III} < \frac{A^{III}}{2}$ &c. &c. considerato il quantitativo, e non i segni.

1275. Ma i numeri α, α^{I}, α^{II} &c. come si possono determinare? Rispondo che tali numeri si debbon cercare per mezzo di un tentativo, ristretto dentro opportuni limiti, dei quali faremo parola in appresso. Non é gia che manchi il Metodo, e questo diretto e generale, con con cui soddisfare ad una tal ricerca; ma esso è talmente prolisso e complicato, che nella pratica è preteribile certamente il limitato tentativo, del quale parleremo a suo luogo. (Vedasi il Metodo suddetto negli Atti di Berl. all' an. 1768.)

Ritornando adesso in cammino sia

1276. *Teorema*. Le quantità A, A^{I}, A^{II}, A^{III} &c. vanno continuamente decrescendo, finchè si arrivi ad un termine $A^{(n)} = \text{ò} < B$, e per conseguenza, le quantitá α, α^{I}, α^{II}, α^{III} vanno anch'esse decrescendo, fino ad un termine $\alpha^{(n)} = \text{ò} < B$, fatta sempre astrazione dai segni.

Dimostrazione. Avendosi per ipotesi $\alpha < \frac{A}{2}$, si ha pure $\alpha^{2} < \frac{A^{2}}{4}$, e per più forte ragione $\alpha^{2} - B < \frac{A^{2}}{4}$; ma $\alpha^{2} - B = AA^{I}$; dunque $AA^{I} < \frac{A^{2}}{4}$, e perciò $A^{I} <$

$\frac{A}{4}$. Egualmente essendo $\alpha < \frac{A'}{2}$ si troverà con lo stesso raziocinio $A' < \frac{A'}{4}$, e così in seguito, finchè si arrivi ad un termine $A^{(n)}$, e perciò all'equazione $A^{(n+1)}A^{(n)} = \alpha^{(n)2} - B$, nella quale, a motivo che si ha $\alpha < \frac{A}{2}$, $A' < \frac{A}{4}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $A'' < \frac{A'}{4}$, $\alpha'' < \frac{A''}{2}$ ec. $\alpha^{(n)2}$ sia $= o < B$; siccome poi B non è un quadrato, nè $= 1$, $\alpha^{(n)2}$ dev'essere $< B$; perciò $B - \alpha^{(n)2} < B$, o al più $= B$, se α sia $= o$. Dunque $A^{(n)}$, dovendo essere un divisore di $\alpha^{(n)} - B$, dev'essere $= o < B$

Se B sia negativo si avrà l'equazione $AA' = \alpha^2 + B$; si ponga A in luogo di B, $\frac{A^2}{4}$ in luogo di α^2, e si avrà $AA' < \frac{A^2}{4} + A$, cioè $A' < \frac{A}{4} + 1$. Egualmente si trova $A'' < \frac{A'}{4} + 1$ &c.&c. finchè si giunga ad un termine $A^{(n)} = o < B$.

1277. Si avverta qui che sebbene si possa sempre inoltrare la serie A, A', A'', A''' &c. fino ad un termine $= o < B$, nondimeno qualora se ne trovi uno, il quale sia $> B$, ma tale che sia quadrato, o multiplo di un quadrato, cosicchè diviso per detto quadrato, riducasi $= o < B$, può fermarsi l'operazione a questo termine. Suppongasi per esempio, di esser giunti ad un termine $A^{(n)} = o < B = a^2 C$, ed in cui sia $C = o < B$. Si vede che se abbiasi $B = \pm 1$, dovrà esser $C = 1$: Si moltiplichino insieme tutte l'equazioni (a) fino all'equazione $A^{(n-1)}A^{(n)} = \alpha^{(n-1)2}$

$-B$, e si avrà (*Lem. I.*) un' equazione, di cui il primo membro sarà $AA'^2\ A''^2\ A'''^2 \ldots A^{(n-1)^2}\ A^{(n)}$, ed il secondo sarà della forma P^2-BQ^2. Perciò fatto $A^{(n)}=a^2C$, si avrà $CA(A'A''A''' \ldots A^{(n-1)}a)^2 = P^2-BQ^2$; quest' equazione si moltiplichi per l'equazione(A), e diverrà della forma $C(AA'A''A'''\ldots A^{(n-1)})\ ar^2=p'^2-Br'^2$, e fatta $AA'A''A'''\ldots A^{(n-1)}ar=q'$, della forma $Cq'^2=p'^2-Br'^2$, o sia $Br'^2=p'^2-Cq'^2$ ... (B) equazione totalmente simile alla proposta, e perciò solubile, se ella lo è. Dico adesso

1278. *Teor.* Che se l' equazione (B) è risolubile, deve esser tale anche l'equazione (A).

Dimostrazione. Si moltiplichi l' equazione $Cq'^2=p'^2-Br'^2$ per il prodotto dell' equazioni (a), ed à motivo di $A^{(n)}=a^2C$, si avrà la trasformata $A(A'A''A''' \ldots A^{(n-1)}aC)^2\ q'^2=(p'^2-Br'^2)(P^2-BQ^2)$; facciasi $A'A'' \ldots A^{(n-1)}aCq=\pi$ e la nuova trasformata sarà (*Lem. cit.*) $A\pi^2=\lambda^2-B\mu^2$. Ora essendo l'equazione $A\pi^2=\lambda^2-\mu^2$ della forma stessa, che l'equazione (A), si paragoni con l' equazione (A), e poichè λ, μ, π comprendono p', q', r' con dei coefficienti numerici, si dedurranno p, q, r per p', q', r'; quindi essendo l' equazione (B) risolubile, e sapendosi per conseguenza i valori di p', q', r', si conosceranno anche i valori di p, q, ed r, e con ciò sarà sciolta l'equazione (A).

Se si fosse trovato $C=1$, l' equazione (B) sarebbe già ridotta alla forma $am^2=x^2-y^2$; se ne avrebbe perciò la soluzione, e con ciò quella della proposta. Ma suppongasi tuttavia $C>1$.

Siccome l' equazione $Br'^2=p'^2-Cq'^2$ è della stessa forma che l'equazione (A), si comincerà dal cercare un numero $\beta<\frac{B}{2}$, e tale che β^2-C sia divi-

visibile per B; se questo non si possa trovare, non sarà possibile la soluzione richiesta in numeri razionali. Con questo si avrá la serie di equazioni che segue

$$(b)\quad \begin{cases} B\ B^{I} = \beta^{2} - C \\ B^{I}\ B^{II} = \beta^{I2} - C \\ B^{II}\ B^{III} = \beta^{II2} - C \\ B^{III} B^{IIII} = \beta^{III2} - C \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{cases}$$

nelle quali B, B^{I}, B^{II} &c. come β, β^{I}, β^{II} &c. vanno decrescendo successivamente, finchè si giunga ad un termine $B^{(n)} = \grave{o} < C$, e $\beta^{(n)} < C$; il che dovrà necessariamente avvenire, perciò che si è dimostrato di sopra. Operando per tanto come si è praticato al (*n.* 1277) per ottenere l'equazione (*B*), si troverà una terza equazione (*C*), della forma $Cr^{II2} = p^{II2} - Dq^{II2}$ dalla di cui soluzione dipenderà quella dell'equazione (*B*), in guisa che sciolta l'equazione (*C*), sì avrà immediatamente la soluzione dell'equazione (*B*), e per mezzo di questa la soluzione dell'equazione (*A*).

Se D sia $= 1$, l'equazione (*C*) sarà ridotta alla forma dell'equazione di rapporto $am^{2} = x^{2} - y^{2}$. Se questo non sia, si cercherà come sopra un numero $\gamma < \frac{C}{2}$, tale che $\gamma^{2} - D$ sia divisibile per C, e così in seguito. Si avrá in questa guisa un'altra serie di equazioni

$$(c)\quad \begin{cases} Ar^{2} = p^{2} - Bq^{2} \\ Br^{I2} = p^{I2} - Cq^{I2} \\ Cr^{II2} = p^{II2} - Dq^{II2} \\ Dr^{III2} = p^{III2} - Eq^{III2} \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{cases}$$

che

che le chiameremo equazioni primarie, in paragone dell' equazioni (*a*), e (*b*), le quali le distingueremo col nome di equazioni secondarie.

1279. *Scol.* Si può qui osservare utilmente, come in pratica si derivino con facilità l'equazioni primarie una dall' altra. Dalla 1.ª $Ar^2=p^2=Bq^2$ si deduce la 2.ª con porre B in luogo di A, ed $A^{(n)}$ in luogo di B; La 3.ª si deduce dalla 2.ª con porre $A^{(n)}$ in luogo di B, $B^{(n)}$ in luogo di $A^{(n)}$; La 4.ª si deduce dalla 3.ª con porre $B^{(n)}$ in luogo di $A^{(n)}$, e $C^{(n)}$ in luogo di $B^{(n)}$, e così in seguito, intendendosi per $A^{(n)}$ un coefficiente numerico $=$ ò $<B$; per $B^{(n)}$ un coefficiente numerico $=$ ò $<C$, &c. i quali si sanno trovare.

Ma è poi certo che uno dei coefficienti successivi A, B, C, D &c. debba divenire $=\pm 1$?

1280. *Teorema*. Nell' equazioni primarie (*c*), i coefficienti sussecutivi A, B, C, D &c. vanno decrescendo successivamente finchè uno di essi arrivi ad essere $=\pm 1$.

Dimostrazione. Che i numeri A, B, C &c. debbano andar diminuendo si sa per ciò, che si è veduto di sopra *n.* 1278. Dunque, siccome son essi per ipotesi numeri interi, e non sono quadrati, nè multipli di quadrati, è necessario, che mentre uno arriva ad essere $=$o, il termine precedente sia divenuto $=1$. Di fatto se pongasi, per esempio, $D=$ o, si ha $Cr^{1/2}=p^{1/2}$, cioè per non esser C nè quadrato, nè multiplo di quadrato, $C=1$. Ma per la successiva diminuzione, uno dei termini A, B, C, D &c. deve necessariamente passare per zero: dunque &c.

1281. Si può adesso concludere che dall'equazione $Ar^2=p^2-kq^2$ ... (*A*) si può dedurre successivamente un numero di equazioni primarie della forma

ma rappresentata dall' equazioni (*c*). Che una di queste deve avere l'unità per coefficiente di due termini, e perciò dev'essere della forma $am^2 = x^2 - y^2$, èquazione che si sa sciogliere generalmente. Che dalla soluzione dell' ultima equazione finale si può risalire alla soluzione della precedente, e da essa all' altra, finchè si giunga alla soluzione dell'equazione $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ e con ciò dell' equazione $A + Bt^2 = u^2$, e finalmente dell' equazione ..... $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + K = 0$.

Resta per tanto esposto in questa guisa un Metodo generale, per cui ottenere la soluzione di qualunque equazione quadratica, in numeri razionali fratti. Spargerà maggior luce sull'esposta Teorìa l'esempio che segue.

Esempio. Sia proposta a sciogliersi l' equazione di secondo grado ridotta (*n*.1268.) $109 = u^2 - 7t^2$

Fatte le sostituzioni di $\frac{p}{r}$, e $\frac{q}{r}$, essa diviene $109r^2 = p^2 - 7q^2 \ldots$ (*A*), e si ha $A = 109$, e $B = 7$, e non avendosi nè in A, nè in B verun fattor quadrato, non v'è da fare alcuna riduzione. Si cerchi per tanto un numero intero $\alpha < \frac{109}{2}$, e tale che $\alpha^2 - 7$ sia divisibile per 109. A quest' effetto, in vece di tentare tutti i numeri naturali < 54, sarà più comodo cercare un numero, che sia multiplo di 109, e che sia della forma $\alpha^2 - 7$, cioè tale, che essendo accresciuto di 7, divenga un quadrato. Si osserverà per questo, che nell'equazione $AA' = \alpha^2 - B$, alla quale si tratta di sodisfare, A' dev' essere $< \frac{A}{4}$, qualora B sia positivo, e

che

che dev' essere $< \frac{A}{4} + 1$, qualora B sia negativo; indi non si avranno da tentare per A', che i numeri naturali $< \frac{A}{4} + 1$ presi positivamente, o negativamente, secondo che A sia positiva, ò negativa. Si troverà così, con un ristretto tentativo il numero α, e lo stesso vale per i numeri β, γ, δ &c.

Nel caso presente si trova $A' = 2$, e perciò $2.109+7 = 225 = \alpha^2$, onde $\alpha = 15$. Siccome A' è già $< B$, la prima serie di equazioni secondarie (a) si riduce a questa sola $2.109 = 15^2 - 7$ ... (a)

Fatto adesso ($n.$ 1279) $C = 2$, la seconda equazione primaria è $7r'^2 = p'^2 - 2q'^2$ ... (B). Bisognerà per tanto soddisfare all' equazione $BB' = \beta^2 - C$, cioè $7B' = \beta^2 - C$, β essendo $< \frac{7}{2}$, e si troverà $\beta = 3$, e $B' = 1$, di modo che, siccome B' è già $< C$, la seconda serie (b) di equazioni secondarie si riduce ad una, ed è $1.7 = 3^2 - 2$ (K). Si faccia dunque $D = 2$, e la terza equazione primaria risulterà $2r''^2 = p''^2 - q''^2$ ... (C), che è della forma stessa dell' equazione di rapporto.

Si paragoni dunque l' equazione di rapporto con quest'ultima equazione, e si avrà $a = 2$, $m = r''$, $x = p''$, $y = q''$; quindi $\mathfrak{P} = 1$, e $\mathfrak{Q} = 2$; per conseguenza $p'' = g^2 + 2f^2$, $q'' = g^2 - 2f^2$, $r'' = 2gf$. Così non si ha più che da risalire dall' equazione (C) all' equazione (B), e da questa all' equazione (A) per le regole date.

A quest' effetto si cangi subito l' equazione (C)

in

in questa $q''^2 = p''^2 - 2r''^2$, e si moltiplichi per l'equazione (*K*). Si avrà per le formole del (*n.* 1271.) $7q''^2 = (3p'' \pm 2r'')^2 - 2(3r'' \pm p'')^2$, equazione che essendo paragonata coll' equazione (*B*), somministra le tre equazioni, $p' = 3p'' + 2r''$, $q' = 3r'' \pm p''$, $r' = q'$, i segni ambigui essendo a piacere.

Si cangi parimente l'equazione (*B*) in $2q'^2 = p'^2 - 7r'^2$, e si moltiplichi in seguito per l'equazione (*a*), onde si ottenga l' equazione 109. $4q'^2 = (15p' \pm 7r')^2 - 7(15r' \pm p')^2$, e paragonando quest' equazione coll' equazione (*A*), si avrà finalmente $p = 15p' \pm 7r'$, $q = 15r' \pm p'$, $r = 2q$, onde non si ha che da sostituire successivamente i valori di p', q', r' ed in seguito quelli di p'', q'', r''. Essendo così trovati i valori di p, q, r, si avrà $u = \frac{p}{r}$, e $t = \frac{q}{r}$, e l'equazione sarà sciolta.

1282. Ma venghiamo alla soluzione dell' equazione $A = u^2 - Bt^2$ in numeri interi. Premettonsi le riflessioni che seguono.

I. Se A non contiene alcun fattor quadrato, (si suppone al solito che non sia un quadrato) i numeri u, e t debbon esser primi fra di loro. Di fatto se avessero un divisor comune K, u^2, e t^2 avrebbero un divisor K^2, e perciò anche in A dovrebbe contenersi K^2, il che è contrario all'ipotesi.

II. Se A contenga uno, ò più fattori quadrati, t, ed u possono avere uno, ò più divisori comuni. In generale però qualunque avvenga dei casi suddetti, l'equazione proposta si può liberare dai fattori comuni, in guisa che $A = u^2 - Bt^2$ divenga un' equazione, in cui u, e t sieno primi fra di loro.

III.

III. Debbon aver luogo come nel caso delle soluzioni fratte l' equazioni $AA' = \alpha^2 - B$ &c. $BB' = \beta^2 - C$ &c.

In effetto, se si moltiplichi ciascun membro dell' equazione $A = u^2 - Bt^2$ per $u'^2 - Bt'^2$, si ha la trasformata $A(u'^2 - Bt'^2) = (u^2 - Bt^2)(u'^2 - Bt'^2) = (n.\ 1271.)(uu' - Btt')^2 - B(ut' - u't)^2$. Si prendano per u', e t' due numeri tali che $ut' - u't$ sia $= \pm 1$; pongasi $(uu' + Btt')^2 = \alpha^2$, e si avrà $\mathcal{A}(u'^2 - Bt'^2) = AA' = \alpha^2 - B$. Lo stesso prova la sussistenza dell' altre equazioni analoghe.

IV. Convien, che i numeri α, β, γ &c. sieno respettivamente $< i\frac{A}{2}$, $< i\frac{B}{2}$, $< i\frac{C}{2}$ ec. ec. (*lem.* 2)

1283. Poste queste riflessioni, per intraprendere con successo la proposta soluzione, fa d'uopo distinguere nell' equazione $A = u^2 - Bt^2$ il caso di B negativo, ed il caso di B positivo, perchè ciascuno di questi casi richiede un Metodo particolare. Incominciamo dal primo, che è il più semplice.

Sia $A = u^2 + Bt^2$, e siccome per il Lemma II. è $A(u'^2 + Bt'^2) = \alpha^2 + B = \mathcal{A}\mathcal{A}'$, dev'essere $u'^2 + Bt'^2 = A'$. Pongasi $\alpha' = \mu A' \pm \alpha$, e perchè $\alpha^2 + B$ è divisibile per $\mathcal{A}'$ anche $\alpha'^2 + B$ sarà divisibile per A'. Ora $\mathcal{A}'$ è $= u'^2 - Bt'^2$; dunque nell' equazione ..... $\frac{\alpha'^2 + B}{A'} = A''$, o sia $\alpha'^2 + B = A'A''$, $\mathcal{A}''$ dev' esser della forma $u''^2 + Bt''^2$ dove u'', e t'' sieno tali che abbiasi $t'u'' - u't'' = \pm 1$ affinchè dal prodotto di $\mathcal{A}''$ per $\mathcal{A}'$ ne risulti una funzione della forma $\alpha'^2 + B$. Così fatto $\alpha'' = \mu''A'' \pm \alpha'$, $\alpha''^2 + B$ dovrà esser divisibile per A'', e il quoziente $\mathcal{A}'''$ dovrà esser della forma $u'''^2 + Bt'''^2$, dove u''', e t''' sieno tali,

tali, che abbiasi $t^{II}u^{III} - u^{II}t^{III} = \pm 1$. In generale si avrà $A^{(n)} = u^{(n)2} + Bt^{(n)2}$. Di qui ne derivano l' equazioni (b^1), (c'), (d'), (e^1)

$$(b^1)\quad \begin{cases} A^{I} = u^{I2} + Bt^{I2} \\ A^{II} = u^{II2} + Bt^{II2} \\ A^{III} = u^{III2} + Bt^{III2} \\ A^{Iv} = u^{Iv2} + Bt^{Iv2} \\ A^{v} = u^{v2} + Bt^{v2} \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{cases} \qquad (c')\quad \begin{cases} u\ t^{I} - u^{I}\ t = \pm 1 \\ u^{I}\ t^{II} - u^{II}\ t^{I} = \pm 1 \\ u^{II}\ t^{III} - u^{III}\ t^{II} = \pm 1 \\ u^{III}\ t^{Iv} - u^{Iv}\ t^{III} = \pm 1 \\ u^{Iv}\ t^{v} - u^{v}\ t^{Iv} = \pm 1 \\ \text{\&c.} \end{cases}$$

$$(d^1)\quad \begin{cases} AA^{I} = \alpha^2 + B \\ A^{I}A^{II} = \alpha^{I2} + B \\ A^{II}A^{III} = \alpha^{II2} + B \\ A^{III}A^{Iv} = \alpha^{III2} + B \\ A^{Iv}A^{v} = \alpha^{Iv2} + B \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{cases} \qquad (e^1)\quad \begin{cases} \alpha = uu^{I} + Bt\ t^{I} \\ \alpha^{I} = u^{I}u^{II} + Bt^{I}\ t^{II} \\ \alpha^{II} = u^{II}u^{III} + Bt^{II}\ t^{III} \\ \alpha^{III} = u^{III}u^{Iv} + Bt^{III}t^{Iv} \\ \alpha^{Iv} = u^{III}u^{v} + Bt^{Iv}t^{v} \\ \text{\&c. \&c.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \frac{A}{2} \\ \leftarrow \frac{A^{I}}{2} \\ \leftarrow \frac{A^{II}}{2} \\ \leftarrow \frac{A^{III}}{2} \\ \leftarrow \frac{A^{Iv}}{2} \end{matrix}$$

1284. Affinchè l'equazione proposta sia risolubile in numeri interi conviene che abbiano luogo l' equazioni (b^1), e (d^1); e si richiede inoltre, che l' equazioni (f^1)

$$u = \frac{\alpha u' \pm Bt'}{A'} \qquad t = \frac{\alpha t' \pm u'}{A'}$$

$$u' = \frac{\alpha' u'' \pm Bt''}{A''} \qquad (f') \quad t' = \frac{\alpha' t'' \pm u''}{A''}$$

$$u'' = \frac{\alpha'' u''' \pm Bt'''}{A'''} \qquad t'' = \frac{\alpha' t''' \pm u'''}{A'''}$$

&c. &c. &c. &c.

le quali si ottengono per mezzo dell'eliminazione dall' equazioni (c'), (e'), diano per u, u', u''&c. t, t', t''&c. dei valori interi. Questo poi avverrà sicuramente, qualora inoltrando quanto basta l' equazioni (b') si giunga ad un' equazione $A^{(n)}=u^{(n)2}+Bt^{(n)2}$, nella quale sia $A^{(n)}=1$. Difatto, dovendo essere $A^{(n)}<B$, ed essendo $A^{(n)}=1$, l' equazione suddetta, a cagione che t ed u non possono esser numeri fratti, non può sussistere, senza che sia $t^{(n)}=0$; ma questo essendo, ne risulta $A^{(n)}=u^{(n)2}$, e perciò $u^{(n)}=1$, $t^{(n)}$ ed $u^{(n)}$ sono dunque numeri interi; ora essendo essi interi, è facile à dimostrarsi, che $u^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}$...u, $t^{(n-1)}t^{(n-2)}$,t debbono esser parimente numeri interi. A quest' oggetto riassumansi l'equazioni (c'). Si sommi fa prima colla seconda, o si sottragga una dall' altra, e si avrà $\frac{u'' \mp u}{t'' \mp t} = \frac{u'}{t'}$, e per conseguenza ..... $u'' \mp u = \mu' u'$, $t'' \mp t = \mu' t'$, d' onde si ha, preso il segno superiore $u=u''-\mu' u'$, $t=t''-\mu' t'$, μ' essendo un numero intero qualunque. Facciasi la stessa operazione sulla seconda, e sulla terza equazione, e si avrà $u'=u''-\mu'' u''$, $t'=t''-\mu'' u''$. Si pratichi lo stesso sulla terza, e quarta equazione e si dedurrà ..... $u''=u'''-\mu''' u'''$, $t''=t^{IV}-\mu''' t'''$; e nel modo stesso proseguendo, si avrà $u'''=u^{V}-\mu^{IV} u^{IV}$ .....

t'''

$t'''=t'^{v}-\mu'^{v}t'^{v}$ ... $u^{(n)}=u^{(n+2)}-\mu^{(n+1)}u^{(n+1)}$, $t^{(n)}=t^{(n+2)}-\mu^{(n+1)}t^{(n+1)}$.

Dispongansi le equazioni per ordine, onde si abbia

$$(g')\quad \begin{array}{llll} u=u'' & -\mu' u' , & t=t'' & -\mu' t' \\ u'=u''' & -\mu'' u'' , & t'=t''' & -\mu'' t'' \\ u''=u'^{v} & -\mu''' u''' , & t''=t'^{v} & -\mu''' t''' \\ \text{\&c. \&c.} & & \text{\&c. \&c.} & \end{array}$$

$u^{(n)}=u^{(n+2)}-\mu^{(n+1)}u^{(n+1)}$, $t^{(n)}=t^{(n+2)}-\mu^{(n+1)}t^{(n-1)}$

e si vedrà à colpo d' occhio, che se $u^{(n)}$, $t^{(n)}u^{(n-1)}$, $t^{(n-2)}$ sien numeri interi, tali debbono essere ancora $u^{(n-2)}$, $t^{(n-2)}$ &c. u, t. Ho detto, essendo interi anche $t^{(n-1)}$, $t^{(n-1)}$, perchè interi essendo $u^{(n)}$ e $t^{(n)}$, ne segue in virtù dell'equazion (f') che tali debban essere anch'essi. Ecco adesso il Met. della soluz.

1285. S'inoltrino l'equazioni (b') finchè si arrivi ad una di esse, in cui abbiasi $\mathcal{A}^{(n)}=1$. Giunti che siasi a questa si avrà $t^{(n)}=0$, ed $u^{(n)}=1$. Questi valori si sostitituiscano nell' espressioni di $u^{(n-2)}$, e $t^{(n-2)}$ e così in seguito, e si arriverà ad ottenere i valori di u, e t in numeri interi.

1286. Qualora non si potesse trovare un equazione, in cui fosse $\mathcal{A}^{(n)}=1$, sarebbe certo che l' equazione proposta non ammette soluzione in numeri interi. Supposto però che questo non succeda, per determinare tutte le soluzioni del problema, converrà investigare tutti i numeri possibili, che possono soddisfare alla condizione, a cui soddisfa α, avvertendo inoltre di prender tali valori, tanto positivi, che negativi.

Esempio. Si debba sciogliere l' equazione ..... $166=ut^2+13t^2$, u, e t, dovendo esser numeri interi.

Operazione. Incomincio da ricercare l' equazioni corrispondenti alle formole $\mathcal{A}\mathcal{A}'=\alpha^2+B$, $\mathcal{A}'\mathcal{A}''$

=

$= \alpha'^2 + B$ &c. &c. finchè giungasi ad un'equazione, in cui sia $A^{(n)} = 1$. Esse sono le seguenti :

$$166.17 = 53^2 + 13$$
$$17.\ 14 = 15^2 + 13$$
$$14.\ 1 = 1^2 + 13$$

Si ha pertanto $A' = 17$, $A'' = 14$, e $A''' = 1$, $\alpha = 53$, $\alpha' = 15$, $\alpha'' = 1$; $u''' = 1$, $t''' = 0$. Si sostituiscano questi valori nelle formole (f'), e si avranno i valori seguenti di u'', u', u, t'', t', t cioè

$$u''' = 1, \quad t''' = 0$$
$$u'' = 1, \quad t'' = 1$$
$$u' = 2, \quad t' = 1$$
$$u = 7, \quad t = 3$$

1287. Eccoci finalmente al caso, che nell' equazione $A = u^2 - Bt^2 B$ sia positivo. In questo, sebbene si giunga ad un' equazione $A^{(n)} = u^{(n)2} - Bt^{(n)2}$, in cui si abbia $A^{(n)} < B$, e $= 1$, non ne segue che sia $t^{(n)} = 0$, e per conseguenza non ha luogo il Metodo addotto per il caso di B negativo. Il Metodo che passiamo ad esporre, quanto è operoso, e difficile, altrettanto è ragionato, ed elegante.

1288. Inoltrando l' equazioni (d') quanto bisogna, si sa (*n.* 1277.) che si deve arrivare ad un' equazione $A^{(n)} A^{(n+1)} = \alpha^{(n)2} - B \ldots (P)$ nella quale sia $\alpha^{(n)} < B$, e che perciò sia della forma $-A^{(n)} A^{(n+1)} = B - \alpha^{(n)2}$, $A^{(n)}$ ed $A^{(n+1)}$ essendo di segno diverso, ed uno di essi essendo $< \sqrt{B}$. Per maggior semplicità, si ponga $\alpha^{(n)} = e$; uno de' numeri $A^{(n)}$, $A^{(n+1)}$, $= \pm E$, l' altro $= \mp D$, E, e D essendo positivi, ed $E < \sqrt{B}$, onde l' equazione (P) divenga $-DE = B - e^2$. In virtù dell' equazioni $(b')\ldots A^{(n)} = u^{(n)2} - Bt^{(n)2}$, $A^{(n+1)} = u^{(n+1)2} - Bt^{(n+1)2}$, D, ed E dovranno esser della forma .... $(R) \pm D = x^2 - B\rho^2$, $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$. Si sciolgano queste due equazioni, nelle quali è $DE < B$, e avendo

do conosciute le incognite π, ρ, σ, τ si conosceranno $u^{(n)}$, $t^{(n)}$, $u^{(n+1)}$ $t^{(n+1)}$, e con ciò si potrà risalire per mezzo delle formole (l') ai valori di u, e di t.

1289. Se meglio però si rifletta, si vede facilmente che dell' equazioni $\mp D = \pi^2 - B\rho^2 \pm E = \sigma^2 - B\tau^2$ basta risciogliere una soltanto, perchè si hanno fra .... π, ρ, σ, τ, le due equazioni generali .....:..... $\sigma\rho - \pi\tau = \pm 1$, $\sigma\pi - B\tau\rho = e$ . . .(β), dalle quali conoscendo due delle incognite, si deducono le altre due con facilità; avendo però riguardo di prendere e positiva, e negativa, ad oggetto di ottenere tutte le soluzioni possibili; e di cangiare i segni di ..... μ', μ'', μ''' . . . $\mu^{(n)}$ nelle formole (g') quando si prenda e negativa.

1290. Giacchè dunque tutto il problema si riduce alla soluzione di una dell'equazioni (R), proponghiamoci di sciogliere l'equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$, nella quale $E < \sqrt{B}$. Suppongansi già note le quantità σ, τ; esse in virtù dell' equazione $\sigma\rho - \pi\tau = \pm 1$ dovranno esser numeri primi fra di loro, e ρ dovrà esser $> \tau$ in virtù dell' equazione stessa $\pm E = \rho^2 - B\tau^2$, dalla quale si ha $\frac{\sigma}{\tau} = \sqrt{\pm\frac{E}{\tau^2} + B} = \frac{\sqrt{\pm E + B\tau^2}}{\tau}$. Si potrà per conseguenza ridurre $\frac{\sigma}{\tau}$ in frazione continua alla forma

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon \;\&c. + \cfrac{1}{\omega}}}}}$$

Questa frazione essendo mutilata successivamente di tutti i termini dopo il primo, dopo il secondo, dopo il terzo &c. darà tante frazioni equivalenti $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ &c. $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{\sigma}{\tau}$ nelle quali . . . . . $a = \alpha$, $c = \beta\alpha + 1$, $e = c\gamma + a$ &c. $\sigma = p\omega + m$. $b = 1$, $d = b\beta$, $f = d\gamma + b$ &c $\tau = q\omega + n$

1291. Le addotte frazioni sono, come si sà d'altronde, alternativamente maggiori, e minori della frazione principale $\frac{\sigma}{\tau}$, e sono convergenti verso il di lei valore; ed inoltre sono tali, che si ha $ad - bc = -1$, $cf - de = 1$ &c. $mq - np = \pm 1$, $p\tau - q\sigma = \pm 1$ . . . (S)

Ciò posto, la penultima frazione equivalente, cioè $\frac{p}{q}$ si ponga $= \frac{\sigma'}{\tau'}$; l'antipenultima $= \frac{\sigma''}{\tau''}$, la seguente $= \frac{\sigma'''}{\tau'''}$ &c. &c., e si avrà per la natura delle frazioni continue (ved. le formole (Q) (*n.* 391), $\sigma = \lambda' \sigma' + \sigma''$; $\sigma' = \lambda'' \sigma'' + \sigma'''$, $\sigma'' = \lambda''' \sigma''' + \sigma^{iv}$ &c. $\sigma^{(n)} = \lambda^{(n+1)} \sigma^{(n+1)} + \sigma^{(n+2)}$ (Q')... $\tau = \lambda' \tau' + \tau''$; $\tau' = \lambda'' \tau'' + \tau'''$; $\tau'' = \lambda''' \tau''' + \tau^{iv}$; $\tau^{(n)} = \lambda^{(n+1)} \tau^{(n+1)} + \tau^{(n+2)}$, λ'', λ''' &c. $\lambda^{(n)}$ essendo i denominatori della frazione continua, come β, γ &c., de' quali è λ il primo. Si vede poi (*n.* 386) che i due ultimi termini della série σ, σ', σ'' &c. debbon essere α, 1, e che i due ultimi termini della serie τ, τ', τ'' &c. debbon essere 1, 0, e perciò si concepisce facilmente, che qualora si conoscessero i numeri λ', λ'', λ''' &c. col numero α, si potrebbe risalire per mezzo delle for-

formole precedenti ai valori di σ, e di τ:

1292. Ma ripigliamo l'equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$, e suppongasi che abbia luogo il segno superiore.

Dividendo per τ^2 si avrà $\frac{\sigma^2}{\tau^2} - B = \frac{E}{\tau^2}$, e dividendo nuovamente per $\frac{\sigma}{\tau} + \sqrt{B}$, $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B}$, $\frac{E}{\tau^2\left(\frac{\sigma}{\tau} + \sqrt{B}\right)}$

Dunque avendosi $E < \sqrt{B}$, dev'essere per più forte ragione $E < \sqrt{B} + \frac{\sigma}{\tau}$, e perciò $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B} > 0$ e $< \frac{1}{\tau^2}$.

Ora dall'equazione $\sigma\tau' - \sigma'\tau = 1$ si ha $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma'}{\tau'} = \frac{1}{\tau\tau'^2}$. Quest'ultima equazione si sottragga dal rapporto $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B} < \frac{1}{\tau^2}$, e si otterrà $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} < \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau\tau'}$; ma $\tau' < \tau$; dunque $\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau\tau'} < 0$, e per più forte ragione $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} < 0$. Si moltiplichi questo rapporto per $\frac{\sigma}{\tau} + \sqrt{B}$, e si troverà $\frac{\sigma'^2}{\tau'^2} - B < 0$, e per conseguenza $\sigma'^2 - B\tau'^2 < 0 = -E'$, numero intero positivo.

L'equazione $\sigma'\tau'' - \tau'\sigma'' = -1$ dà parimente $\frac{\sigma'}{\tau'} - \frac{\sigma''}{\tau''} = -\frac{1}{\tau'\tau''}$ equazione, che essendo aggiunta all'altra esposta qui sopra $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma'}{\tau'} = \frac{1}{\tau'\tau''}$, ci dà $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma''}{\tau''} = \frac{1}{\tau\tau'} - \frac{1}{\tau'\tau''}$; ma essendo $\tau' < \tau$, e $\tau'' < \tau$ si

si ha $\frac{1}{\tau'\tau''} > \frac{1}{\tau\tau'}$; dunque $\frac{\sigma'}{\tau'} - \frac{\sigma''}{\tau''} < 0$, e perciò $\frac{\sigma''}{\tau''} - \frac{\sigma'}{\tau'} > 0$. Ora si ha $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} > 0$; dunque anche $\frac{\sigma''}{\tau''} - \sqrt{B} > 0$; e moltiplicando per $\frac{\sigma''}{\tau''} + \sqrt{B}$, $\frac{\sigma''^2}{\tau''^2} - B > 0$, vale a dire $\sigma''^2 - B\tau''^2 > 0$, e perciò $\sigma''^2 - B\tau''^2 = E''$, E'' essendo un numero intero positivo.

Seguitando lo stesso raziocinio si ha dall'equazione $\sigma''\tau''' - \tau''\sigma''' = 1$ $\frac{\sigma''}{\tau''} - \frac{\sigma'''}{\tau'''} = \frac{1}{\tau''\tau'''}$, ed aggiungendo l'equazione $\frac{\sigma'}{\tau'} - \frac{\sigma''}{\tau''} = \frac{1}{\tau'\tau''} = \frac{1}{\tau'\tau''}$ si ottiene $\frac{\sigma'}{\tau'} - \frac{\sigma'''}{\tau'''} = \frac{1}{\tau\tau'} - \frac{1}{\tau'\tau''} + \frac{1}{\tau''\tau'''}$; quindi, poichè $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} < \frac{1}{\tau^2}$, $\frac{\sigma'''}{\tau'''} - \sqrt{B} < \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau\tau'} + \frac{1}{\tau'\tau''} - \frac{1}{\tau''\tau'''}$; ed a motivo che si ha $\tau' < \tau$, $\tau'' < \tau'$ ec., $\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau\tau'} < 0$, e $\frac{1}{\tau'\tau''} - \frac{1}{\tau''\tau'''} < 0$, $\frac{\sigma'''}{\tau'''} - \sqrt{B} < 0$; dunque $\frac{\sigma'''^2}{\tau'''^2} - B < 0$ e $\sigma'''^2 - B\tau'''^2 < 0$ $= -E'''$, E''' essendo un numero positivo.

1293. Passiamo adesso a supporre che nell'equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$ abbiasi il segno negativo.

Sarà

Sarà $\frac{\sigma^2}{\tau^2} - B = -\frac{E}{\tau^2}$, e $\frac{\sigma}{\tau} = \sqrt{B} = -\frac{E}{\tau^2\left(\frac{\sigma}{\tau} + \sqrt{B}\right)}$

Quindi a cagione di $E_0 < \sqrt{B}$, $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B} < 0$ e $> -\frac{1}{\sigma^2}$. Ora si ha in questo caso $\sigma\tau' - \tau\sigma' = -1$; dunque $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma'}{\tau'} = -\frac{1}{\tau\tau'}$, e perchè si ha $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B} > -\frac{1}{\tau^2}$, $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} > \frac{1}{\tau'\tau''} - \frac{1}{\tau^2}$; ma essendo $\tau' < \tau$, risulta $\frac{1}{\tau\tau'} - \frac{1}{\tau^2} > 0$, e per conseguenza $\frac{\sigma'}{\tau'} - \sqrt{B} > 0$, e $\sigma'^2 - B\tau'^2 > 0 = E'$, E' essendo un numero positivo, si avrà in seguito $\sigma'\tau'' - \tau'\sigma'' = +1$. Dunque $\frac{\sigma'}{\tau'} - \frac{\sigma''}{\tau''} = \frac{1}{\tau'\tau''}$; e poichè $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma'}{\tau'} = -\frac{1}{\tau\tau'}$, $\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma''}{\tau''} = -\frac{1}{\tau\tau'} + \frac{1}{\tau'\tau''} > 0$; per conseguenza $\frac{\sigma''}{\tau''} - \frac{\sigma}{\tau} < 0$. Ma $\frac{\sigma}{\tau} - \sqrt{B} < 0$; dunque $\frac{\sigma''}{\tau''} - \sqrt{B} < 0$ e $\sigma''^2 - B\tau''^2 < 0 = -E''$, essendo E'' un numero positivo.

Si proverà egualmente, che si deve avere $\sigma'''^2 - B\tau'''^2 = E'''$, E''' essendo positivo, e così in seguito.

1294. Combinando pertanto i due casi di E positivo enegativo, si avranno le formole generali $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$, $\mp E' = \sigma'^2 - B\tau'^2$; $\pm E'' = \sigma''^2 - B\tau''^2$, $\mp E''' =$

$=\sigma^{(n)2}-B\tau^{(n)2}$ .... $\pm E^{(n)}=\sigma^{(n)2}-B\tau^{(n)2}$ .... (φ)

1295. Si moltiplichino adesso l'equazioni (φ) a due a due, e si avrà (n° 1271.) 1.° — $EE^{I}=(\sigma\sigma^{I}-B\tau\tau^{I})^{2}-B(\sigma\tau^{I}-\tau\sigma^{I})^{2}$; ma per le formole (c^{I}) .... $\sigma\tau^{I}-\tau\sigma^{I}=\pm 1$; dunque, se pongasi $\sigma\sigma^{I}-B\tau\tau^{I}=\mp\varepsilon$, si avrà l'equazione $-EE^{I}=\varepsilon^{2}-B$; ovvero $EE^{I}=B-\varepsilon^{2}$.

2.° $-E^{I}E^{II}=(\sigma^{I}\sigma^{II}-\tau^{I}\tau^{II}B)^{2}-(\sigma^{I}\tau^{II}-\tau^{I}\sigma^{II})^{2}B$, di dove , posto $\sigma^{I}\sigma^{II}-B\tau^{I}\tau^{II}=\pm\varepsilon^{I}$, si deduce $-E^{I}E^{II}=\varepsilon^{I2}-B$, o sia $E^{I}E^{II}=B-\varepsilon^{I2}$; 3.° facendo parimente $\sigma^{II}\sigma^{III}-B\tau^{II}\tau^{III}=\mp\varepsilon^{II}$, si troverà $-E^{II}E^{III}=\varepsilon^{II2}-B$, vale a dire $E^{II}E^{III}=B-\varepsilon^{II2}$ &c. &c.

1296. Intanto si ha per le formole (2!) $\sigma^{II}=\sigma-\lambda^{I}\sigma^{I}$, e $\tau^{II}=\tau-\lambda^{I}\tau^{I}$; dunque $\sigma^{I}\sigma^{II}-B\tau^{I}\tau^{II}=\sigma\sigma^{I}-B\tau\tau^{I}-\lambda^{I}(\sigma^{I2}-B\tau^{I2})$, equazione , che si verifica facilmente , con sostituirvi i valori di σ^{II} , e τ^{II} . Dunque $\pm\varepsilon^{I}=\mp\varepsilon\pm\lambda^{I}E^{I}$, cioè $\varepsilon^{I}=\lambda^{I}E^{I}-\varepsilon$.

Si ha parimente $\sigma^{III}=\sigma^{I}-\lambda^{II}\sigma^{II}$, $\tau^{III}=\tau^{I}-\lambda^{II}\tau^{II}$, e perciò $\sigma^{II}\sigma^{III}-B\tau^{II}\tau^{III}=\sigma^{I}\sigma^{II}-B\tau^{I}\tau^{II}-\lambda^{II}(\sigma^{II2}-B\tau^{II2})$, cioè $\mp\varepsilon^{II}=\pm\varepsilon^{I}\mp\lambda^{II}E^{II}$, ovvero $\varepsilon^{II}=\lambda^{II}E^{II}-\varepsilon^{I}$, e così &c. Si hanno pertanto l' equazioni $EE^{I}=B-\varepsilon^{2}$; $E^{I}E^{II}=B-\varepsilon^{I2}$; $E^{II}E^{III}=B-\varepsilon^{II2}$ &c. ...(χ), nelle quali $\varepsilon^{I}=\lambda^{I}E-\varepsilon$, $\varepsilon^{II}=\lambda^{II}E^{II}-\varepsilon^{I}$ &c. &c (ω) .

1297. Conviene osservare adesso , che siccome i numeri E , E^{I} , E^{II} &c. debbon essere necessariamente positivi, affinchè l'equazioni (χ) possano sussistere , si richiede che i quadrati ε^{2} , ε^{I2} , ε^{II2} &c. sieno tutti $<B$, e che per conseguenza sieno tutti positivi .

Perchè questo si concepisca ad evidenza , supponiamo 1.° che sia $\varepsilon=-\eta$, η essendo positivo .

Si avrà $\varepsilon=\lambda^{I}E^{I}+\eta$, e perciò ε^{I} positivo , a cagione di λ^{I}, E^{I} positivi ; ma bisogna che sia $\varepsilon^{I2}<B$;

dun-

dunque $\lambda^{I}E^{I}+n<\sqrt{B}$, e perciò $\lambda^{I}<\left(\frac{\sqrt{B}-n}{E^{I}}\right)$; ma λ^{I} dev' essere un numero intero positivo; dunque $E^{I}<(\sqrt{B}-n)$. Ora si ha $EE^{I}=B-n^{2}=(\sqrt{B}+n)(\sqrt{B}-n)$: dunque E^{I} non può esser $<(\sqrt{B}-n)$, se non sia $E>(\sqrt{B}+n)$; ma $E<\sqrt{B}$ per ipotesi; dunque non può esser $E>(\sqrt{B}+n)$, e perciò non può esser ε negativo.

Supponghiamo in 2.° luogo che sia $\varepsilon^{I}=-n^{I}$; sarà $\varepsilon^{II}=\lambda^{II}E^{II}+n^{I}$, e per conseguenza ε^{II} positivo; ma si deve avere $\varepsilon^{II}<\sqrt{B}$; dunque bisogna che sia $\lambda^{II}E^{II}+n^{I}<\sqrt{B}$ e, perciò $\lambda^{II}<\left(\frac{\sqrt{B}-n^{I}}{E^{II}}\right)$, dove E^{II} sia $<\sqrt{B}-n$. Ora si ha $E^{I}E^{II}=B-n^{I2}=(\sqrt{B}+n^{I})(\sqrt{B}-n^{I})$; dunque E^{II} non può esser $<\sqrt{B}-n^{I}$, senza che sia $E^{I}>\sqrt{B}+n^{I}$, e per più forte ragione, senza che sia $E^{I}>\sqrt{B}$. Ma l' equazione $\varepsilon^{I}=\lambda^{I}E^{I}-\varepsilon$ dà, a cagione di $\varepsilon^{I}=-n^{I}$, $\lambda^{I}E^{I}=\varepsilon-n^{I}$; dunque essendo $\varepsilon<\sqrt{B}$, $\lambda^{I}E^{I}<\sqrt{B}$; e perciò non è possibile che ε^{I} sia un numero negativo. Col medesimo raziocinio si proverebbe che ε^{II}, ε^{III}, ε^{IV} &c. debbono esser tutti necessariamente positivi.

1298. Intanto, poichè si debbono avere i rapporti $\varepsilon^{2}<B$ $\varepsilon^{I2}<B$, $\varepsilon^{II2}<B$ &c., e per conseguenza $\varepsilon<\sqrt{B}$, $\varepsilon^{I}<\sqrt{B}$, $\varepsilon^{II}<\sqrt{B}$ &c. supponghiamo che ε sia realmente $<\sqrt{B}$, e vediamo come si debbano determinare i numeri λ^{I}; λ^{II}, λ^{III} &c. nell'equazioni (ω), perchè i numeri ε^{I}, ε^{II}, ε^{III} &c. risultino tutti i minori di $\sqrt{B}$.

Sia 1.° $\varepsilon^{I}<\sqrt{B}$; e sarà $\lambda^{I}E^{I}-\varepsilon<B$, e $\lambda^{I}<\left(\frac{\sqrt{B}+\varepsilon}{E^{I}}\right)$;

Ma λ^{I} dev'essere intero positivo; dunque $E^{I}<\sqrt{B}+\varepsilon$, per

per conseguenza, avendosi $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} - \varepsilon)(\sqrt{B} + \varepsilon)$, converrà che sia $E > (\sqrt{B} - \varepsilon)$; quindi E dovrà essere $< \sqrt{B}$, e $> \sqrt{B} - \varepsilon$.

Sia 2.° $\varepsilon'' < \sqrt{B}$, onde si abbia $\lambda'' E'' - \varepsilon' < \sqrt{B}$, ed $\lambda'' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} \right)$ dove $E'' < \sqrt{B} + \varepsilon'$. A cagione di $E'E'' = B - \varepsilon'^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon')(\sqrt{B} - \varepsilon')$, dev' essere $E' > \sqrt{B} - \varepsilon'$, cioè $\varepsilon' > \sqrt{B} - E'$; dunque $\lambda' E' - \varepsilon > \sqrt{B} - E'$, per conseguenza $\lambda + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}$.

Sia 3.° $\varepsilon''' > \sqrt{B}$; dunque $\lambda''' E''' - \varepsilon'' < \sqrt{B}$, e perciò $\lambda''' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''} \right)$. Ora poichè λ''' dev' essere intero positivo, dev'essere $E''' < \sqrt{B} + \varepsilon''$, ed essendo $E'' E''' = B - \varepsilon''^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon'')(\sqrt{B} - \varepsilon'')$, bisogna che sia $E'' > (\sqrt{B} - \varepsilon'')$ vale a dire $\varepsilon'' > (\sqrt{B} - B''')$; dunque $\lambda'' E'' - \varepsilon' > \sqrt{B} - E''$; perciò $\lambda'' + 1 > \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} \right)$ e così in seguito.

1299. Se la quantità E^{IV} fosse l' ultima della serie E', E'', E''' &c. supposta continuata fino ad un termine $< \sqrt{B}$, affinchè l'equazioni $(\mathcal{X})$ ed (ω) possano sussistere, nell'ipotesi di E', E'' &c λ', λ'' &c. numeri interi positivi, converrà che si abbia

$$E < \sqrt{B}, \text{ e } > \sqrt{B} - \varepsilon, \text{ e } \lambda' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'} \right), \ldots\ldots$$

$$\lambda'' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} \right), \quad \lambda''' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'''} \right) \quad \&c.$$

$$\lambda' < \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'} - 1 \right), \quad \lambda'' > \left(\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} - 1 \right),$$

$\lambda'' >$

$$\lambda^{III} > \left(\frac{\sqrt{B}+\varepsilon^{II}}{E^{II}} - 1\right) \text{ \&c. } \ldots\ldots (\mu)$$

1300. E' facile a vedersi di qui che i numeri λ', λ^{II} λ^{III} &c. vengono assolutamente determinati, di modo che, i numeri E, ed ε essendo cogniti, tutti gli altri debbon esser tali parimente in virtù delle formole (χ), (ω), (μ). Difatto, se conoscasi E, ed ε, si avra sulle prime E dall' equazione $EE'=B-\varepsilon^2$. In seguito, determinato λ' con prendere per esso un numero immediatamente $< \frac{\sqrt{B}+\varepsilon}{E'}$, e $> \frac{\sqrt{B}+\varepsilon}{E'} - 1$, si avrà ε' dall' equazione $\varepsilon'=\lambda' E'-\varepsilon$. e con ciò E^{II} dall' equazione $E'E^{II}=B-\varepsilon'^2$. Nel modo stesso, determinando λ^{II} come sopra, si avrà $\varepsilon^{II}=\lambda E^{II}-\varepsilon'$, ed E^{III} dall' equazione $E^{II}E^{III}=B-\varepsilon^{II2}$, e così in seguito.

1301 Dal fin qui detto si può adesso raccogliere, che per ottenere la soluzione dell' equazione $\pm E=\sigma^2-B\tau^2$, nella quale $E<\sqrt{B}$, si deve incominciare dalla ricerca di un numero intero $\varepsilon<\sqrt{B}$, e $>\sqrt{B}-E$, e tale che $B-\varepsilon^2$ sia divisibile per E. Se nessuno de' numeri interi, che si comprendono fra $\sqrt{B}$, e $\sqrt{B}-E$ non possa soddisfare a questa condizione, l'equazione proposta non ammetterà sicuramente veruna soluzione in numeri interi.

1302. Supposto però che siasi trovato uno, o più valori di ε, si formerà per ciascuno di essi, coll' ajuto delle formole del §. prec. una serie, E, E', E^{II}, E^{III} &c. ed un' altra ε', ε^{II}, ε^{III} &c. come pure la serie λ', λ^{II}, λ^{III} &c; e se la proposta equazione sia solubile in interi, si arriverà necessariamente ad un termine della serie .....

E'

E^{I}, E^{II}, E^{III} &c. il quale sia $=1$; e questo occuperà un sito pari, o impari secondo che nell' equazione $\pm\pm E=\sigma^2-B\tau^2$ abbia luogo il segno superiore, o l' inferiore. Per concepirne la ragione, basta riflettere, che continuando le serie ..... $\sigma^{I}\sigma^{II}$, σ^{III} &c. τ, τ^{I}, τ^{II}, τ^{III} &c. si deve (§1284.) arrivare necessariamente a dei termini $\sigma^{(m)}$, $\tau^{(m)}$, tali che sia $\sigma^{m}=1$ e $\sigma^{(m)}=0$. Questo essendo poichè in virtù delle formole (φ) si ha ....;.....,.. $\sigma^{(m)2}-B\tau^{(m)2}=\pm\pm E^{(m)}$, qualora sia m pari, e $\sigma^{(m)2}-B\tau^{(m)2}=\mp\mp E^{(m)}$, qualora m sia impari, deve risultarne manifestamente $\pm\pm E^{(m)}=1$ nel primo caso, e $\mp\mp E^{(m)}=1$ nel secondo caso. Dunque se non esista nellaserie E, E^{I}, E^{II}, E^{III} &c untermine $E^{(m)}=1$, il problema non potrà sciogliersi in numeri interi.

1303. Ma supponghiamo di esser giunti al termine divisato $E^{(m)}=1$, e vediamo per qual via si possa pervenire alla soluzione richiesta.

Trovato il termine $E^{(m)}=1$, si ha immediatamente $\sigma^{m}=1$, e $\tau^{(m)}=0$; quindi per le formole (S) si ha $\sigma^{(m-1)}\tau^{(m)}-\tau^{(m-1)}\sigma^{(m)}=\mp\mp 1$, se m è pari, e $=\pm\pm 1$, te m è impari; pongasi $\sigma^{(m)}=1$, e $\tau^{(m)}=0$, e rimarrà $\tau^{(m-1)}=\pm\pm 1$. Inoltre per le formole (ω) si ha $\sigma^{(m-1)}\sigma^{(m)}-B\tau^{(m-1)}\tau^{(m)}=\pm\pm\varepsilon^{(m-1)}$, e fatto come sopra $\sigma^{(m)}=1$, $\tau^{(m)}=0$, risulta $\sigma^{(m-1)}=\pm\pm\varepsilon^{(m-1)}$.

Conosciuti così i termini $\sigma^{(m)}$, $\tau^{(m)}$, $\sigma^{(m-1)}$, $\tau^{(m-1)}$, si può risalire per mezzo delle formole ($\mathfrak{Q}^{I}$ (*n.* 1292.) ai valori di σ, e di τ, e con ciò vien risciolto il problema.

1304. Ecco pertanto, che tutto si riduce a trovare un termine della serie E, E^{I}, E^{II} &c. il quale sia $=1$. Affinchè si possa da noi procedere in questa ricerca con tutto il possibil succes-

so

so, passiamo ad occuparci della natura, e proprietà della suddetta serie E, E', E'', E''' &c.

1305. Primieramente ci si presenta da osservare, che detta serie può esser portata lungi quanto si vuole, perchè le operazioni, con cui si ottengono i successivi termini E, E', E'' &c. ε', ε'' ε''' &c. λ', λ'', λ''' &c. non sono limitate per veruna condizione.

1306. Oltre di questo è da notarsi, che siccome i numeri, E, E' &c. debbon esser tutti $< \sqrt{B}$, e nel tempo stesso interi, ciascuno di essi dev' esser suscettibile di un numero di valori assai ristretto; d'onde ne segue, che se la serie E, E', E'' &c. suppongasi protratta all' infinito, un medesimo termine debba tornare infinite volte; e che una tal serie infinita altro esser non debbà che un complesso di periodi identici di termini successivi.

1307. Per vedere questa verità con chiarezza, supponghiamo che i termini E''' E'^{v} sieno respettivamente identici ai termini E^{vII}, E^{vIII}, onde si abbiano l'equazioni $E'''=E^{vII}$, $E^{Iv}E^{vI.I}$. Per le formole (χ) si avrà $\varepsilon^{vI.I}=\varepsilon''$; quindi per le formole (μ). $\lambda^{vI.I}=\lambda'^{v}$, e per conseguenza dalle formole (ω) $\varepsilon^{vI.I}=\varepsilon'^{Iv}$; Dunque per le formole (χ) si ha $E'^{x}=E^{v}$: Lo stesso replicarsi per gli altri termini.

1308. Si raccoglie di qui, che qualora sieno dati due termini consecutivi, i termini seguenti vengono dati parimente per le formole (χ).. (ω), (μ). Trovinsi questi successivamente, e se s' incontrino di nuovo i due termini consecutivi dati, i termini seguenti ritorneranno i medesimi egualmente, e la serie sarà determinata. Così per esempio se vengano dati i termini E''', E'^{v}, e calcolando si trovino due termini E^{vI}, E^{vIII} identici ai termini dati, si concluderà che la serie deve essere della forma che segue.

E,

$E, E^{I}, E^{II}, E^{III}, E^{Iv}, E^{v}, E^{vI}, E^{vII}, E^{vIII}, E^{Iv}, E^{v}, E^{vI}, E^{III}$ &c. cosicchè se abbiasi $E^{(\mu)} = E$, sarà $E^{\mu+1} = E^{I}$, ed in generale $E^{\mu+\nu} = E^{\nu}$.

1309. Concludasi da tutto questo che per risciogliere l'equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$, basta formar la serie E, E^{I}, E^{II} &c. &c. e proseguirla, finchè s' incontrino due termini consecutivi, identici a due consecutivi termini antecedenti, i quali si può dimostrar facilmente, che debbon sempre essere i primi due. Se nel primo periodo non si troverà nessun termine che sia $= 1$, si concluderà che il problema proposto non è solubile in numeri interi. Supposto però che vi si trovi, questo termine somministrerà immediatamente una soluzione dell' equazione proposta, purchè m sia pari, o impari secondo che in detta equazione si avrà il segno superiore, ò l' inferiore. Se l'esponente m non soddisfaccia à tal condizione, si proseguirà la serie, e si osserverà se il termine $= 1$, che deve ricomparire in tutti i periodi susseguenti, sia affetto di un' esponente dotato della condizione richiesta; e qualora ciò sia, si avrà da esso una soluzione del problema.

Continuando in questa guisa la serie, si potrà ottenere il termine divisato quante volte si vorrà, e dedurne per conseguenza infinite soluzioni. Quindi si ha un corollario caratteristico, ed è: Che se l' equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$, vale a dire un problema indeterminato di 2° grado ammetta una soluzione in numeri interi, ne deve ammettere infinite.

1310. Vediamo intanto come dalla soluzione dell' equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$ si possa derivare la so-

soluzione dell' equazione $\mathcal{A}+Bt^2=u^2$.

Dall' equazioni $\sigma\rho-\pi\tau=\pm 1$, $\sigma\rho-B\tau\rho=e$. (β) (*n.* 1289.) si deduca, come si praticò intorno all' equazioni (c'), (d'), il valore di ρ, e di π, i quali, avvertendo che in virtù delle formole (φ), E sta in luogo di $\mathcal{A}$, E' in luogo di $\mathcal{A}'$ si avranno colla semplice sostituzione fatta nelle formole (f'). Tali valori saranno $\rho=\frac{B\tau\pm e\sigma}{E}$, $\pi=\frac{\sigma\pm e\tau}{E}$, espressioni che debbon dare dei risultati interi e qualora interi sieno σ, e τ. Ora conoscendo σ, τ, ρ, e π si può retrocedendo, (n.1288) risalire fino ai valori di t, ed u, e con ciò, supposta $e=\alpha^{(n)}$ successivamente positiva, e negativa, ottenere quante soluzioni si vogliano del problema proposto. Resta solo che si determini λ.

1311. A quest' effetto osservo che dall' equazioni $\sigma\rho-\mu\tau=\pm 1$, $\sigma\tau'-\sigma'\tau=\pm 1$ si ha $\sigma(\rho-\tau')-\tau(\pi-\sigma')=0$, e perciò $\frac{\sigma}{\tau}=\frac{\pi-\sigma'}{\rho-\tau'}$; dunque $\pi=\lambda\sigma\pm\sigma'$, e $\pi=\lambda\tau+\tau'$; ma $\sigma\pi-E\tau\rho=e$; dunque $e=\lambda(\sigma^2-B\tau^2)+\sigma\sigma'-B\tau\tau'=\lambda E-\varepsilon$; dunque $\varepsilon=\lambda E\pm e$ ora $\varepsilon<\sqrt{B}$, e $>\sqrt{B-E}$; dunque $\lambda E\mp e<\sqrt{B}$ e $>\sqrt{B-E}$, eperciò $\lambda<\frac{\sqrt{B}\pm e}{E}$, e $\lambda>\frac{\sqrt{B}\pm e}{E}-1$, limiti dai quali si avrà λ.

1312. Affinchè l' equazione generale ..... $ax^2+bxy+cy^2$ &c. $+K=0$ sia risolubile in numeri interi, si è veduto, (n. 1254) che non basta assolutamente, che risciolgasi in numeri interi la derivata $\mathcal{A}=u^2-Bt^2$, ma che si richiede, che abbiano luogo le due condizioni ivi divisate, cioè che

che $\pm u - f$ sia divisibile per B, e che $\pm t - d - b(\pm u - f)$ sia divisibile der $2a$, i segni ambigui essendo a piacere. Qualora B sia negetivo, siccome il numero delle soluzioni è limitato, non riesce soverchiamente incomodo il riprovare quali dei numeri ottenuti per t, ed u soddisfacciano all' addotta condizione; ma se B sia positivo, siccome si hanno in questo caso infinite soluzioni, e perciò infiniti valori per t, ed u come si può determinare fra quest' infiniti valori, quali sieno quelli, che verificano le condizioni prescritte? E' questa una ricerca di somma importanza, in cui non si può riuscire senza delle formole particolari. Noi passiamo adinvestigarle col calcolo che segue.

Premettonsi alcune riduzioni.

1313. I. Si è veduto (n. 1292.) che si hanno generalmente le due equazioni ..... $\sigma\sigma' - B\tau\tau' = \mp\varepsilon$, $\sigma\tau' - \tau\sigma = \pm 1$; dunque si avrà $\mp(\varepsilon + \sqrt{B}) = (\sigma + \tau\sqrt{B})(\sigma' - \tau'\sqrt{B})$.

II. Parimente à cagione di $\sigma'\sigma'' - B\tau'\tau'' = \pm\varepsilon'$, e $\sigma'\tau'' - \sigma''\tau' = \pm 1$, si avrà $\pm(\varepsilon' + \sqrt{B})$ ..... $(\sigma' + \tau'\sqrt{B}))(\sigma'' - \tau''\sqrt{B})$, $\pm(\varepsilon'' + \sqrt{B})$ ..... $= (\sigma'' + \tau''\sqrt{B})(\sigma''' - \tau'''\sqrt{B}$; $\pm(\varepsilon''' + \sqrt{B})$ ..... $(\sigma''' + \tau'''\sqrt{B}$, e così in seguito.

III. Si faccia successivamente la moltiplicazione di quest' equazioni, avvertendo che si ha ..... $(\sigma' - \tau'\sqrt{B})(\sigma' + \tau'\sqrt{B}) = \sigma'^2 - B\tau'^2 = \pm E'$, e che in generale si ha $(\sigma^{(n)} - \tau^{(n)}\sqrt{B})(\sigma^{(n)} + \tau^{(n)}\sqrt{B}) = \sigma^{(n)2} - B\tau^{(n)2} = \pm E^{(n)}$ e si avrà $(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B}) = \pm E'(\sigma + \tau\sqrt{B})(\sigma'' - \tau''\sqrt{B})$; $(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) = \mp E'E''(\sigma + \tau\sqrt{B})(\sigma''' - \tau'''\sqrt{B})$; e in generale $(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B})\ldots(\varepsilon^{n-1} + \sqrt{B}) = \pm E'E''E''' (\sigma + \tau\sqrt{B})(\sigma^{(n)} - \tau^{(n)}\sqrt{B})$, i segni ambigui dovendo essere i medesimi, che nell' equa-

equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$. Si ponga $u = n\mu + m$, ed $E^m = E^{n\mu+m} = 1$, darà $\sigma^{(u)} =$, e $\tau^{(u)} = 0$; purchè u sia pari, ò impari, secondo che nell'equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$ abbia luogo il segno superiore, o l' inferiore

IV. Con questo la formola esposta diviene della forma $(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B}) \ldots\ldots (\varepsilon^{(K-1)}+\sqrt{B}) = E'E'' \ldots\ldots E^{(K-1)}(\sigma+\tau\sqrt{B})$ dove k sta in luogo di $n\mu+m$, e questa si riduce alla seguente $(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B}) \ldots\ldots\ldots ((\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B}) \ldots\ldots\ldots (\varepsilon^{\mu-1}+\sqrt{B}))^n = E'E'' \ldots\ldots E^{m-1} \times (E\,E'\,E''\,E''' \ldots\ldots E^{\mu-1})^n (\sigma+\tau\sqrt{B})$, cosicchè se facciasi per maggior semplicità $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B}) \ldots\ldots (\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B})}{E'\,E''\,E''' \ldots\ldots E^{m-1}} \ldots\ldots\ldots = R+S\sqrt{B}$, e $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B}) \ldots\ldots (\varepsilon^{\mu-1}+\sqrt{B})}{E\,E'\,E''\ldots E^{\mu-1}} = X+\Upsilon\sqrt{B}$. Si avrà $(R+S\sqrt{B})(X+\Upsilon\sqrt{B})^n = \sigma+\tau\sqrt{B}$; e se inoltre si ponga $(X+\Upsilon\sqrt{B})^n = \mathcal{V}+Z\sqrt{B}$, si avrà per il doppio segno di $\sqrt{B}$ $\mathcal{V} = \dfrac{(\Upsilon+\mathrm{Y}\sqrt{B})^n + (X-\Upsilon\sqrt{B})^n}{2}$

$$Z = \frac{(X+\Upsilon\sqrt{B})^n - (X-\Upsilon\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

1314. Di qui poi si deduce $(R+S\sqrt{B})(\mathcal{V}+Z\sqrt{B}) = \sigma+\tau\sqrt{B}$ cioè $R\mathcal{V}+BSZ+(RZ+S\mathcal{V})\sqrt{B} = \sigma+\tau\sqrt{B}$; e paragonando le parti razionali e le irrazionali separatamente si ha $\sigma = R\mathcal{V}+BSZ$; $\tau = RZ+S\mathcal{V}$, espressioni generali dei numeri σ, τ, sodisfacenti all' equazione $\pm E = \sigma^2 - B\tau^2$.

Queste richiedono però che sappiansi determinare X, ed Υ, R, ed S. Il metodo per riuscirvi è semplice.

1315. Si ha per le formole (ω) del (*n.* 1296.) $\varepsilon = \lambda' E' - \varepsilon'$; dunque $\varepsilon+\sqrt{B} = \lambda' E' + \sqrt{B} - \varepsilon'$; quindi

di $(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B}) = \ldots\ldots \lambda' E'(\varepsilon+\sqrt{B})+B-\varepsilon'^2$ =(a cagione che $B-\varepsilon'^2 = \ldots E'E'')\lambda' E'(\varepsilon'+\sqrt{B})$ $+E'E''$, e dividendo per E' $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})}{E'}$ $=E''+\lambda'(\varepsilon'+\sqrt{B})$.

Parimente, a motivo che si ha $\varepsilon'=\lambda''E''-\varepsilon''$, si avrà $E''=\lambda'(\varepsilon'+\sqrt{B})=(\lambda''\lambda'+1)E''+\lambda'(\sqrt{B}-\varepsilon'')$; dunque moltiplicando per $\varepsilon''+\sqrt{B}$, mettendo $E''E'''$ in luogo di $B-\varepsilon''^2$, e dividendo per E'' si avrà $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon''+\sqrt{B})}{E'.E''}$ $=\lambda' E'''+(\lambda''\lambda'+1)\varepsilon''+\sqrt{B}$.

Sostituiscasi dinuovo $\lambda'''E'''-\varepsilon'''$ in vece di ε''; si moltiplichi per $\varepsilon''+\sqrt{B}$, e si divida per E''', dopo aver messo $E'''E^{iv}$ per $B-\varepsilon'''^2$, e si avrà $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon''+\sqrt{B})(\varepsilon'''+\sqrt{B})}{E'.E''.E'''}$ ..... $=(\lambda''\lambda'+1)E^{iv}+(\lambda'''(\lambda''\lambda'+1)+\lambda')(\varepsilon'''+\sqrt{B})$, e così in seguito.

1316. E' facile adesso a concludersi, che se formisi la serie $l=1$, $l'=\lambda' l$, $l''=\lambda'' l'+l$, $l'''=\lambda''' l+l'$. $l^{iv}=\lambda^{iv}l'''+l''$ &c. ... (π) si avrà in generale ..... $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon''+\sqrt{B}) \ldots\ldots (\varepsilon^{\rho}+\sqrt{B})}{E'E''E'''\ldots\ldots E^{\rho}}$ ..... $=l^{r-1}E^{+1}+l^{r}(\varepsilon^{r}+\sqrt{B})$

Dunque, poichè si ha per le formole del numero 1°. $R+S\sqrt{B}=$ $\dfrac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon''+\sqrt{B})\ldots\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B})}{E.E'.E''..E^{m-1}}$ se si fa nell' ultima formola $\rho=m-1$ si avrà ..... $R+S\sqrt{B}=l^{m-1}E^{m}+l^{m-1}(\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B}$. Ma si ha per ipotesi (*n.* 1302) $E^{m}=1$; di più si è veduto (n.1298)

che

che le quantità E^{I}, E^{II} &c. debbon esser tali, che abbiasi $E^{I}>\sqrt{B}-\varepsilon$, $E^{II}>\sqrt{B}-\varepsilon^{I}$ &c. e perciò anche $E^{m}=1>\sqrt{B}-\varepsilon^{m-1}$; dunque $\varepsilon^{m-1}>\sqrt{B}-1$; dunque poichè ε^{m-1} dev' essere un numero intero positivo $<\sqrt{B}$ (*n.* 1297.)si vede, che per ε^{m-1} non può prendersi che il numero intero, che è immediatamente minore di $\sqrt{B}$. Sia questo numero $=\beta$; sarà $\varepsilon^{m-1}=\beta$, ed $(R+S\sqrt{B})=l^{m-2}+l^{m-1}(\beta+\sqrt{B})$; dunque $R=\beta l^{m-1}+l^{m-2}$; $S=l^{m-1}$; quindi si conosceranno facilmente le quantità R, S per mezzo delle formole (π).

1317. Vi sono però due casi, che sembrano dover soffrire qualche eccezione; uno è quello di $m=0$, e l'altro quello di $m=1$. In questi casi l avrebbe un esponente negativo, il che non ha luogo nelle formole (π). Consideriamoli distintamente.

Caso I. Se $m=0$, il che avviene quando $E=1$, si avrà nelle formole del (§1314.)$u=n\mu$, e si troverà la sola equazione $((\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon^{I}+\sqrt{B})\ldots(\varepsilon^{\mu-1}+\sqrt{B}))n=(E\,E^{I}E^{II}\ldots E^{\mu-1})n(\sigma+\sqrt{B}$, cioè $\ldots(X+Z\sqrt{B})n=\sigma+\tau\sqrt{B}$. Questa essendo paragonata coll' equazione generale $\ldots\ldots(R+C\sqrt{B})(X+Z\sqrt{B})^{n}=\sigma+\tau\sqrt{B}$, somministra $\ldots\ldots R+S\sqrt{E}=1$, e per conseguenza $R=1$, $S=0$. Quindi si trova immediatamente $\sigma=0$, e $\tau=Z$. (§.1337.)

Caso II. Se $m=1$, il che succede quando $E^{I}=1$, la formola generale $\ldots\ldots\frac{(\varepsilon+\sqrt{B})(\varepsilon^{I}+\sqrt{B})\ldots(\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B})}{E\,E^{I}E^{II}\ldots E^{m-1}}=R+S\sqrt{B}$ si riduce ad $\varepsilon+\sqrt{B}=R+S\sqrt{B}$, di dove si ha $R=B$, $S=1$, e siccome $=\varepsilon^{m-1}=\beta$, $R=\beta$, $S=1$. Facciamo intanto $\rho=\mu-1$, e si avrà per le formole del (§1315.e 1318.) $X+Y\sqrt{B}=\frac{(l^{\mu-2}E_{\mu}+)l^{\mu-1}(\varepsilon^{\mu-1}+\sqrt{B})}{E}$. Ma si ha per

le formole (ω) $\varepsilon^{\mu-1}=\lambda^{\mu}E^{\mu}-\varepsilon^{\mu}$; dunque, avendosi $E^{\mu}=E$, $\varepsilon^{\mu}=\varepsilon$ (§. 1308.) ed $l^{\mu}=\lambda^{\mu}l^{\mu-1}+l^{\mu-2}$ per le formole (π) si avrà $X+Y\sqrt{B}=l^{\mu}+\frac{l^{\mu-1}(\sqrt{B}-\varepsilon)}{E}$, d'onde si deduce $X=l^{\mu}-\frac{\varepsilon l^{\mu-1}}{E}$, $Y=\frac{l^{\mu}-1}{E}$

1318. Ecco dunque trovate l'espressioni di X, ed Y nei casi di $m=0$, ed $m=1$. E' vero che esse compariscono sotto forma frazionaria, ma nondimeno si può esser sicuri, che daranno sempre dei valori interi per X ed Y, poichè altrimenti i numeri p, e q non sarebbero sempre interi, il che è contrario alla natura delle nostre formole.

1319. La seconda riflessione che si deve premettere, si aggira intorno al metodo, che dee tenersi per ottenere l'espressioni generali di σ', e di τ', trovate che siensi, come si è fatto, le formole generali di σ, e τ.

1320. Sia pertanto da determinarsi l'espressione generale di σ', e τ' nell'equazione $\mp E'=\tau'^{2}-B\tau'^{2}$.

A quest'effetto basta riflettere, che siccome si è trovato di sopra $\mp(\varepsilon+\sqrt{B})=(\sigma+\tau\sqrt{B}(\sigma'-\tau'\sqrt{B})$ si deve avere $\mp(\varepsilon+\sqrt{B})(\sigma'+\tau'\sqrt{B})=(\sigma+\tau\sqrt{B})(\sigma^{2}-B\tau'^{2})=\pm E'(\sigma+\tau\sqrt{B})$.

Di qui adesso derivasi $\sigma'+\tau'\sqrt{B}=\frac{E'}{E+\sqrt{B}}\ldots\ldots$ $(\sigma+\tau\sqrt{B})$. Dunque se facciasi $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{(\varepsilon'+\sqrt{B})(\varepsilon''+\sqrt{B})\ldots\ldots(\varepsilon^{m-1}+\sqrt{B})}{E'E''\ldots\ldots E^{m-1}}=R'+S'\sqrt{B}$.

si ritroverà, come sopra, $(R'+S'\sqrt{B})(\mathcal{V}+Z\sqrt{B})=\sigma'+\tau'\sqrt{B}$, di dove si ha finalmente $\tau'=R\mathcal{V}+BS'Z$, e $\tau'=R'Z+S'\mathcal{V}$, e queste sono l'espressio-

sioni generali che si cercavano. Faremo vedere in appresso che queste possono servire alla determinazione di σ, e τ nell'equazione $\mp D=\sigma^2-R\tau^2$ del (*n.* 1288)

Intorno ai numeri X, Y è necessario finalmente dimostrare il seguente, di cui dobbiamo far uso in appresso

1322. *Teor.* I numeri X, Y debbon esser tali, che abbiasi generalmente l'equazione $X^2-BY^2=\pm 1$.

Dimostrazione. Si moltiplichi una per l'altra delle due equazioni comprese nella forma $X=\pm Y\sqrt{B}$

$$=\frac{(\varepsilon\pm\sqrt{B})(\varepsilon\pm\sqrt{B})\ldots\ldots(\varepsilon^{\mu-1}\pm\sqrt{B})}{E\,E'\,E''\ldots\ldots E^{\mu-1}}$$

, e si avrà

$$X^2-BY^2=\frac{(\varepsilon^2-B)(\varepsilon'^2-B)\ldots\ldots(\varepsilon'^{\mu-1)^2}-B)}{E^2\,E'^2\,E''^2\ldots\ldots E'^{\mu-1)^2}}$$

. Ma per le formole (χ) si ha $\varepsilon^2-B=-EE'$, $\varepsilon'^2-B=-E'\,E''$ &c.; dunque χ^2-BY^2 ..... $=\frac{(EE'E'E''\ldots\ldots E^{\mu-1}E^{\mu})^2}{E^2\,E'^2\ldots\ldots E'^{\mu-1)^2}}=\pm\frac{E^{\mu}}{E}=\pm 1$ (perchè si suppone che E^{μ} sia il primo termine delle serie, da cui prende origine il secondo periodo) il segno superiore dovendo aver luogo per il caso di μ pari, e l'inferiore per il caso di μ impari.

Premesso tutto questo venghiamo al nostro oggetto.

1323. Poichè ammettendo A un fattore qualunque ρ, si ha nell'equazione $A+Bt^2=u^2$, $u=\rho p$, e $t=\rho q$, p, e q essendo numeri opportuni a farsi, che ρp, e ρq sieno respettivamente uguali a t, ed u. (ved. *n.* 1282.) e della forma $p=a'v+Bb'Z$, $q=a'Z+b'v$; dove a' b' son numeri interi dati (*n.* 1314.) l'equazione $A+Bt^2=u^2$ può mettersi sotto la for-

ma $A=p^2-Bq^2$ e le condizioni da osservarsi sono che $f\pm\rho p$ sia divisibile per B, e b ..... $\frac{(f\pm\rho p)-B(d\pm\rho q)}{B}$ sia divisibile per $2a$. Siccome poi si ha $v=\frac{(X+Y\sqrt{B})^n+(X-Y\sqrt{B})^n}{2}$ e ....,..... $Z=\frac{(X+Y\sqrt{B})^n-(X-Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$ ed in questi valori, che entrano nell'espressione di p, e q non vi ha che la lettera n, che sia indeterminata, conviene investigare, qual valore si debba dare ad n, affinchè le due suddette condizioni possano verificarsi.

1323. A quest'effetto, supponghiamo sulle prime, che n debba esser generalmente impari. Si avrà $n=2n'+1$ essendo n' un numero intero qualunque.

Pongasi $v'=\frac{(X+Y\sqrt{B})^{2n'}+(X-Y\sqrt{B})^{2n'}}{2}$ e parimente $Z'=\frac{(X+Y\sqrt{B})^{2n'}-(X-Y\sqrt{B})^{2n'}}{2\sqrt{B}}$ e siccome si è trovato $v=\frac{(X+Y\sqrt{B})^n+(X-Y\sqrt{B})^n}{2}$ avvertendo che si ha $(X+Y\sqrt{B})^n+(X-Y\sqrt{B})^n=(X+Y\sqrt{B})(X+Y\sqrt{B})^{2n'}+(X-Y\sqrt{B})(X-Y\sqrt{B})^{2n'}$ si concluderà facilmente, che deve aversi $v=Xv'+YBZ'$, e $Z=XZ'-Yv'$, e perciò $p=(a'X+BYb')v'+B(a'Y-b'X)Z'$, e $q=(a'X-b'BY)Z'+(a'Y-b')v'$, espressioni che sono della medesima forma, che le precedenti, ma tali però, che in esse l'esponente di $X\pm Y\sqrt{B}$ è necessariamente pari.

1324. Effettuata questa riduzione, riesce facile ades-

adesso effettuarne un'altra, ed è di ridurre il caso, in cui l'esponente n sia pari, al caso in cui esser possa un numero qualunque pari, ò impari.

Di fatto, poichè si ha $(X\pm Y\sqrt{B})^2=X^2+BY^2 \pm 2XY\sqrt{B}$, se facciasi $X'=X^2+BY^2$, e $Y'=2XY$, si ottiene $(X\pm Y\sqrt{B})^{2n'}=X'\pm Y'\sqrt{B})^{n'}$; dunque non si ha che da sostituire X', ed Y' ad X, e Y nella formola $(X\pm\sqrt{BY})^{2n'}$ perchè essa si trasformi in un'altra, in cui l'esponente n possa esser pari, ò impari.

1325. Possono dunque le quantità p, e q ricevere generalmente la forma $p=a'v+Bb'z$, $q=a'z+b'v$, v, e z essendo espresse come sopra, n essendo un numero qualunque intero positivo, ed X, e Y essendo tali che abbiasi $X^2-BY^2=\pm 1$.

1326. Passiamo adesso ad esaminare in tutta la possibile generalità, qual debba essere l'esponente n, perchè un numero qualunque della forma $\mathfrak{Q}+Rp+Sq$ sia divisibile per un numero qualunque intero K, ($\mathfrak{Q}$, R, S, essendo numeri dati qualunque non divisibili per K).

Per questo convien dimostrare il Teorema che segue.

1327. *Teor.* Essendo r un numero primo qualunque, ed X, Y numeri interi tali, che sia $X^2-BY^2=1$, dico I.° Che se B sia divisibile per r, $(X\pm Y\sqrt{B})^{2r}-1$ lo sarà parimente: 2.° Che se B non sia divisibile per r, nel qual caso $B^{r-1}-1$ lo sarà necessariamente per il Teorema di Fermat, (ved. le di lui *Opere Matematiche* pag. 163, e nel T. 6. de *Nuovi Comm. di Pietrob. di M. Euler*) distinguo due casi, uno quando $B^{\frac{r-1}{2}}+1$ sia divi-

visibile per r, e l'altro quando lo sia $B^{\frac{r-1}{2}}-1$; poichè r essendo primo, B^r-1 non può esser divisibile per r, à meno che uno dei suoi fattori $B^{\frac{r-1}{2}}+1$, $B^{\frac{r-1}{2}}-1$ non lo sia. Nel primo caso dico, che $(X\pm T\sqrt{B})^{r+r}-1$ sarà divisibile per r, e nel secondo che $(X\pm T\sqrt{B})^{r-1}-1$ lo sarà parimente. Per vederlo si formi la potenza $(X\pm T\sqrt{B})^r$, ed a motivo di r impari si avrà

$$X^r \pm rX^{r-1}T\sqrt{B} + r\frac{(r-1)}{2}X^{r-2}T^2B \pm \frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3}\ldots\ldots$$

$X^{r-3}T^3B\sqrt{B}$ &c. $\pm T^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$.

Ora essendo r un numero primo, è facile a provarsi che i coefficienti, r, $\frac{r(r-1)}{2}$, $\frac{r(n-1)(r-2)}{2\cdot 3}$ &c. sono divisibili per r (*ved. il T. I. de Nuovi Comm. di Pietrob. p.* 22.). Dunque $(X^2\pm T\sqrt{B})^r - X^r \mp T^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ dev' esser divisibile per r, qualunque sieno X, T, B. Ma dal Teorema di Fermat sopra citato, si ha $X^{r-1}-1$ divisibile per r, quando X non lo è. Dunque X^r-X è sempre divisibile per r, qualunque sia X, come pure T^r-T: perciò $T^r-T^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ dev' esserlo ancora, ed aggiungendo, ò togliendo questa funzione dalla precedente ne segue che $(X\pm T\sqrt{B})^r$

$-X$

$-X\mp rXB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ debba esser divisibile per r.

Dunque se B sia divisibile per r, $(X\pm r\sqrt{B})^r-X$ dev' esserlo parimente; come pure il prodotto di questa funzione per quest'altra $(X\pm r\sqrt{B})^r+X$, cioè $(X\pm r\sqrt{B})^{2r}-X^2$. Ma $X^2-Br^2=1$ per ipotesi; dunque X^2-1 sarà divisibile per r; ed aggiunta la funzione X^2-1 alla precedente, la somma $(X\pm r\sqrt{B})^{2r}-1$ dovrà essere ancor essa divisibile per r.

1328. Supponghiamo adesso che B non sia divisibile per r, e che $B^{\frac{r-1}{2}}+1$ lo sia. Si vede che dovrà esser tale anche $rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}+r\sqrt{B}$. Aggiungasi, ò tolgasi questa funzione da $(X\pm r\sqrt{B})^r-X\mp rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, ed il risultato $(X\pm r\sqrt{B})^r-X\pm rB$ sarà egualmente divisibile per r. Dunque moltiplicando per $X\pm r\sqrt{B}$ il prodotto $(X\pm r\sqrt{B})^{r+1}-(X^2-Br^2)$ sarà divisibile anch' esso per r; ma $X^2-Br^2=1$; dunque la funzione $(X\pm r\sqrt{B})^{r+1}-1$ sarà pure divisibile per r. Se $B^{\frac{r-1}{2}}+1$ non sia divisibile per r, $B^{\frac{r-1}{2}}-1$ lo sarà qualora B non lo sia. Per conseguenza $rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}-r\sqrt{B}$ lo sarà parimente; quindi fatta la somma, ò la sottrazione di questa funzione da $(X\pm r\sqrt{B})^r-X\mp rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, il risultato $(X\pm r\sqrt{B})^r$

$-X\mp T\sqrt{B}$ sarà divisibile per r; dunque moltiplicando per $X\mp T\sqrt{B}$ il prodotto $(X\mp T\sqrt{B})^{r-2}$ $(X^2-3T^2)-X\mp T\sqrt{B}=(X\mp T\sqrt{B})^{r-1}-1$ sarà necessariamente divisibile per r

1329. Affine di proseguire il razioc inio con maggior semplicità supponghiamo $=\rho$ l' esponente di $X\mp T\sqrt{B}$, cosicchè sia $(X\mp T\sqrt{B})^{\rho}$ divisibile per r, E' chiaro che se B sia divisibile per r, ρ dev' essere $=2r$; e se B non sia per r divisibile, mentre lo sia $B^{\frac{r-1}{2}}, +1$, ρ dev'essere $= r+1$. Si vede ancora facilmente che essendo $B^{\frac{r-1}{2}}-1$ divisibile per r, dev' aversi $\rho=r-1$, e che finalmente essendo $r=2$ dev'essere $\rho=r$. Ciò posto, sia in generale $a^{\rho}-1$ divisibile per r; dico che $a^{r\rho}-1$ lo sarà per r^2; che $a^{r^2\rho}-1$ lo sarà per r^3 &c. Di fatto, essendo $a^{\rho}-1$ divisibile per r, $a^{mr}-1$ dev'esser divisibile anch' essa per r, essendo m un numero intero positivo; Dunque tutte le funzioni seguenti $a^{\rho}-1$, $a^{2\rho}-a^{\rho}-2$, $a^{3\rho}-a^{2\rho}-a^{\rho}-3$ &c. debbon' esser tutte divisibili per r; Dunque anche $a^{r\rho}+a^{(r-1)\rho}$ $+a^{(r-2)\rho}$ &c. $+a^{\rho}-r$, e per conseguenza $a^{\rho}(a^{(r-1)\rho}$ $+a^{(r-2)\rho}$ &c) $+1)$. Siccome poi a^{ρ} non può esser divisibile per r, perchè $a^{\rho}-1$ lo è, ne segue che $a^{(r-1)\rho}+a^{(r-2)\rho}$ &c. $+1$ debba esserlo necessariamente; e moltiplicando questa funzione per $a^{r}-1$ il prodotto $a^{r\rho}-1$, deve risultar divisibile per r^2. Si proverà nel modo stesso che $a^{r^2\rho}-1$ debba esser divisibile per r^3, e cosi in seguito.

Da questo si raccoglie adesso che $(X\mp T\sqrt{B})^{\rho}-1$ essendo divisibile per r, $(X\mp T\sqrt{B})^{r\rho}-1$ dev' esserlo per r^2; che $(X\mp T\sqrt{B})^{r^2\rho}-1$ dev' esserlo per

r^3 &c., ed in generale $(X \pm T\sqrt{B})^{rm-1} \rho - 1$ per r^m.

1330. Torniamo adesso à considerar la funzione $\Omega + Rp + Sq$, la quale dev' esser (§. 1328) divisibile per K.

Si vede prima di tutto, che qualunque sia K, può egli mettersi sotto la forma $r^m . r'^{|m|} . r''^{|m||}$ &c. (r, ρ' &c. essendo numeri primi). Si vede inoltre, che per esser la funzione $\Omega + Rp + Sq$ divisibile per K, conviene che ella la sia per ciascun fattore $r^m, r'^{|m|}$ ec.

Viceversa essendo la medesima divisibile per ciascuno di tali fattori, dovrà esserlo per il loro prodotto. La questione si riduce pertanto a cercare le condizioni che si richiedono, perchè la funzione $\Omega + Rp + Sq$ sia divisibile per tanti numeri primi, quanti si vogliono.

1331. Per procedere a questa ricerca, si faccia la sostituzione dei valori di p, e q, e di v, e Z (*n.* 1324.) onde la funzione proposta divenga della forma $\Omega + P(X + T\sqrt{B})^n + O(X - T\sqrt{B})^n$. Quindi suppongasi che siavi un valore di n tale, che questa funzione sia divisibile per r^m. Io dico, che se n sia $> r^{m-1} . \rho$, posto il residuo della divisione di n per $r^{m-1} . \rho$, $= \mathcal{N}$, la medesima funzione sarà divisibile ancora per r^m, preso $\mathcal{N}$ in vece di n. Per vederlo sia $n = \mu r^{m-1} . \rho + \mathcal{N}$, ($\mu$ essendo il quoziente della divisione di n per $r^{m-1} . \rho$). Avendosi $(X \pm T\sqrt{B})^{rm-1} . \rho - 1$ divisibile pes r^m (*n.* 1329), $(X \pm T\sqrt{B})^{\mu rm-1} . \rho - 1$ lo sarà parimente. Dunque moltiplicando per $(X \pm T\sqrt{B})^{\mathcal{N}}$, il prodotto $(X \pm T\sqrt{B})^n - (X \pm T\sqrt{B})^{\mathcal{N}}$ sarà pure divisibile per r^m; dunque $P(X + T\sqrt{B})^n - P(X + T\sqrt{B})^{\mathcal{N}}$, e $O(X - T\sqrt{B})^n - O(X - T\sqrt{B})^{\mathcal{N}}$ saranno ambedue divisibili per r^m, e sottraendo queste funzioni dalla proposta $\Omega + P(X + T\sqrt{B})^n + O(X - T\sqrt{B})^n$, il residuo

$\mathfrak{Q}+P(X+T\sqrt{B})^N+O(X-T\sqrt{B})^N$ dev' essere anch' esso divisibile per r^m.

1332. Da tutto questo si deduce adesso, che qualora la funzione $\mathfrak{Q}+Rp+Sq$ sia divisibile per r^m, dando all' esponente n un determinato valore qualunque la medesima funzione debba esser divisibile per r^m, ancorchè si prenda $n<r^{m-1}\rho$. Quindi per riconoscere se la quantità, di cui si tratta, possa risultar divisibile per r^m, non si ha che da porre successivamente $n=0=1=2=3$ ec. $=r^{m-1}\rho$; e se veruno di questi valori non renda possibile la suddetta divisione, ella non potrà divenir possibile per qualunque valore di n, perciò la funzione di cui si tratta, non potrà esser divisibile per r^m.

1333. Ma supponghiamo che si trovi uno, ò più valori di $n<r^{m-1}.\rho$, che rendano la funzione proposta divisibile per ρ^m. In questo caso, detto N uno di questi valori, tutti gli altri valori di n, dotati della medesima proprietà, saranno compresi nella forma $n=\mu\rho^{m-1}.\rho+N$ (dove μ sia un numero intero positivo). Dunque affinchè la quantità $\mathfrak{Q}+Rp+Sq$ possa dividersi per K, fa d' uopo che ella sia divisibile per ρ^m, pigliando $n<\rho^{m-1}\rho$; che sia divisibile per $\rho'^{m'}$, pigliando $n<\rho^{m'-1}.\rho$, e così in seguito. Se una di tali condizioni si trovi impossibile, la funzione proposta non potrà dividersi per K, qualunque sia il valore dell' esponente n.

1334. Suppongasi per tanto che abbiano luogo tutte le divisate condizioni, e dicasi N il valore, ò i valori, di $n<r'^{m'-1}.\rho$, che rendono la funzione $\mathfrak{Q}+Rp+Sq$ divisibile per r^m; dicansi N' i valori di n, che rendono la medesima funzione divisibile per $r'^{m'}$ (essendo $N'<r'^{m'-1}\rho$, e così in seguito. Presi dei numeri qualunque interi μ, μ', μ'' &c. si avrà

in

in generale $n=\mu r^{m-1}.\rho+\mathcal{N}$; $n'=\mu' r'^{m'-1}.\rho'+\mathcal{N}'$; $n''=\mu'' r''^{m''-1}.\rho''+\mathcal{N}''$ &c. di sorta che per trovare i valori dell' esponente n, che possano rendere la funzione proposta divisibile per K, non si tratta che di determinare i valori di μ, μ' μ'', onde abbiasi $\mu r^{m-1}.\rho+\mathcal{N}=\mu' r'^{m'-1}.\rho'+\mathcal{N}$ $\mu r^{m-1}.\rho+\mathcal{N}=\mu'' r''^{m''-1}.\rho''+\mathcal{N}''$ &c. il che si ottiene coi principj dell' Analisi Algebrica indeterminata di primo grado.

1335. In generale si vede, che tutta la questione si riduce a trovare un numero n tale, che essendo diviso per $r^{m-1}.\rho$ lasci un residuo $\mathcal{N}$; ed essendo il residuo $\mathcal{N}$ diviso per $r'^{m'-1}.\rho'$ lasci un residuo $\mathcal{N}'$ &c.

Ecco un metodo semplicissimo per ottener la soluzione di questo problema.

1336. Sieno i divisori M, M' M'' &c. onde sia $M=r^{m-1}\rho$; $M'=r'^{m'-1}.\rho'$ ec. e i residui $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'\mathcal{N}''$ ec. come sopra. Si cerchi il minimo multiplo di M, M'' &c. cioè di tutti i divisori meno M', e sia O; dipoi si cerchi il multiplo più piccolo di M, M', M'' &c. e sia O', e così &c. In fine si cerchino dei numeri μ, ρ, μ', ρ' &c (*n.*1246) tali che sia $\mu O-\nu M'=\mathcal{N}'-\mathcal{N}$; $\mu' P-\nu' M'=\mathcal{N}'-\mathcal{N}\mu'' O''$ $-\rho'' M''=\mathcal{N}''-\mathcal{N}$ &c. essendo il numero di quest' equazioni eguale a quello dei divisori meno uno.

Facciasi $N+\mu O+\mu' O'+\mu'' O''$ &c. $=L$, e si avrà in generale $n=\beta P+L$, β essendo un numero intero qualunque. La dimostrazione si vede facilmente. Se i numeri O, ed M' sieno primi fra loro, è sempre possibile riscioglier l' equazione $\mu O-\nu M'=\mathcal{N}'-\mathcal{N}$ in una infinità di maniere, per i metodi esposti al (*n.* 1246.); ma per il nostr' oggetto è sufficiente un sol valore di μ per sostituirlo

lo in L. Qualora poi non sieno O, ed M' primi fra loro, affinchè l'equazione $\mu O - \nu M' = \mathcal{N}' - \mathcal{N}$ sia solubile in interi, fa d'uopo che $\mathcal{N}' - \mathcal{N}$ sia divisibile per il massimo divisor comune di O, ed M' (*n.* cit.), e se questa condizione non abbia luogo, è impossibile trovar un numero n che abbia le proprietà richieste, e perciò la funzione $\mathcal{Q} + Rp + Sq$ non potrà esser divisibile per K. Lo stesso vale per tutte le altre equazioni $\mu' O - \nu' M'' = \mathcal{N}'' - \mathcal{N}$ &c. a cui bisogna soddisfare.

1337. Per potersi dunque assicurare, che la quantità $\mathcal{Q} + Rp + Sq$ sia divisibile per K, e per trovare nel tempo stesso i valori di n, che posson renderla tale, basta esaminar successivamente tutti i valoei di detta quantità, corrispondenti alle ipotesi $n = 0 = 1 = 2$ &c. fino al più gran numero $r^{m-1}.\rho$, $r^{(m)-1}.\rho'$ &c. d'onde si vede che il tentativo dev' esser sempre limitato.

1338. Sia un'altra funzione $\mathcal{Q}' + R'p + S'q$ che debba esser divisibile per K'. Si proverà, come sopra, che se vi è un numero n, che possa renderla tale, egli dev' esser della forma $n = \beta' \mathcal{P}' + L'$, $\mathcal{P}'$, L' essendo numeri cogniti, e β' un numero intero qualunque. Dunque se $\mathcal{Q} + Rp + Sq$ debba esser divisibile per K, e $\mathcal{Q}' + R'p + S'q$ divisibile per K', n dovrà essere $= \beta \mathcal{P} + L$, e $= \beta' \mathcal{P}' + L$. Resta dunque da sciogliersi l'equazione $\beta \mathcal{P} + L = \beta' \mathcal{P}' + L'$ (*n.* cit.), e si troverà $n = \pi \Pi + \Lambda$ Π essendo il più piccolo multiplo di P, e P', Λ essendo un numero dato, e π un numero intero qualunque.

1339. Si concluda pertanto, che siccome le incognite x, y di un'equazione di secondo grado, si riducono sempre quando u, e t son numeri in-

teri

teri, alle forme $x=\frac{\mathfrak{Q}+Rp+Sq}{K}$, $y=\frac{\mathfrak{Q}'+R'p+S'q}{K'}$ (*n.* 1324.) (l' esponente *n* della funzione... $X\pm Y\sqrt{B}$, che ha parte nell'espressioni di p, e q, potendo esser qualunque intero positivo) per sapere se x, ed y possono essere interi, non si richiede che osservare coi metodi esposti, se i numeratori delle frazioni che rappresentano le suddette incognite, possano esser divisibili per i denominatori K, K'. Si vede poi che mediante gli stessi metodi si otterranno ancora tutti i valori posibili di n, atti a rendere x, ed y interi; valori, il di cui numero si è veduto, che dev' esser infinito, onde qualsivoglia equazione di secondo grado a due incognite, deve ammettere un numero di soluzioni, ò nullo, ò infinito.

Applichiamo finalmente la Teoria alla pratica, e sia

1340. *Probl.* 1. Trovare tutte le soluzioni in numeri interi dell' equazione trattata al (*n.* 1281.) $109=u^2-7t^2$.

Soluzione. Poichè 109 è un numero primo, non si può fare che $p=u$, $t=q$; dunque $A=109$, e $B=7$, onde si ha da sciogliere questa sola equazione $109=p^2-7q^2$. A quest' effetto io considero, che essendosi trovato nel citato esempio, $\alpha=15$; ed $A'=2$, si ha $109.2=15^2-7$; $\alpha=15$, $2.-3=1-7$; $\alpha'=-7A'+\alpha=1$; $A''=-3$, e di quì $p=p''+7p'$, e $q=q''+7q'$. Dunque poichè $\alpha'<\sqrt{B}$, e $A'<\sqrt{B}$, si farà (*n.* 1288) $\alpha'=e=1$, $A'=\pm E=2$; $A''=\mp D=-3$; quindi $E=2$, $D=-3$ coi segni superiori; e per conseguenza $p'=r$, $q'=s$, $p''=\rho$ $q''=\sigma$; perciò si ha da sciogliere l'equazione $2=r^2-7s^2$. Ora avendosi

$E=2$, $B=7$, ed $e=1$, si ha (*n.* 1311)

$$\lambda < \frac{\sqrt{7}+1}{2} \text{ e } > \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 .$$

Quindi, poichè la radice prossima di 7 è 2, $\lambda=1$, e di qui $\varepsilon=E-e=1$. Trovato ε si formino per mezzo delle serie (χ) (ω) (μ) del (*n.* 1296.) le serie seguenti , nelle quali il segno $<$ indica , che bisogna prendere il numero intero immediatamente minore .

$$E=2 \ , \ E^{I} = \frac{7-1}{2} = 3 \ , \ E^{II} = \frac{7-4}{3} = 1 , \ E^{III} = \frac{7-4}{1}$$

$$= 3 , E^{IV} = \frac{7-1}{3} = 2 \ , \ E^{V} = \frac{7-1}{2} = 3 .$$

$$\lambda^{I} < \frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1 = 1 \ , \ \lambda^{II} < \frac{\sqrt{7}+2}{1} = 4 \ , \ \lambda^{III} < \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

$$= 1 , \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 \ , \ \lambda^{V} < \frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1 = 1 .$$

$\varepsilon=1$, $\varepsilon^{I}=1.3-1=2$, $\varepsilon^{II}=4.1-2=2$, $\varepsilon^{III}=1.3-2$ $=1$ $\varepsilon^{IV}=1.2-1=1$, $\varepsilon^{V}=1.3-1=2$.

Dunque poichè si ha $E^{IV}=E$, $E^{V}=1$, si faccia (*n.* 1308.) $E^{IV}=E^{\mu}$, cioè $\mu=4$, e siccome $E^{II}=1$, si faccia $E^{II}=E^{m}$, cioè $m=2$; di dove , perchè si sono presi i segni superiori , ed m è pari , si può concludere che l' equazione proposta è solubile . Ved. (*n.* 1309.)

Si cerchino pertanto i valori di l , l^{I} , l^{II} &c. l^{μ} , come nelle formole (π) del (*n.* 1316) e si avrà. $l=1$, $l^{I}=l=1$, $l^{II}=4$, $l^{I}+l=5$, $l^{III}=l^{II}+l^{I}=6$, l^{IV} $=l^{III}+l^{II}=11$. Di qui per le formole del (*n.* 1316. e 1317.) si troverà, per esser $\beta=2$ numero intero $<\sqrt{7}$,

$$R_{1} = 2\, l^{I} + l = 3 \ , \ S = l^{I} = 1 \ , \ X = l^{IV} - \frac{l^{III}}{2} = 8 ,$$

$T=\frac{l''}{2}=3$) dunque (*n.* 1324.) .....

$$v=\frac{(8+3\sqrt{3})^n+(8-3\sqrt{7})^n}{2}$$

$$z=\frac{(8+3\sqrt{7})^n-(8-3\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$$

dove n può essere un numero intero qualunque positivo, tale che $n\mu+m$ sia pari, cioè che $4n+2$ sia pari; d'onde si vede che n può esser un numero intero positivo qualunque. Dunque (*n. cit.*) $\sigma=3v+7z$, $\tau=3z+v$; e proseguendo il calcolo, come si sà, ottiensi finalmente $p=19v+42z$, $q=19z+6v$, che sono le formole, nelle quali vengono comprese tutte le soluzioni in numeri interi, del problema proposto.

SEZIONE III.

Della soluzione dell' equazioni indeterminate, superiori al secondo grado.

1341. Risciolti in tutta la generalità i problemi di secondo grado, convien passare alla soluzione dell'equazioni superiori. Siccome però non si hanno per queste dei Metodi generali, dovremo limitarci ad esporre i metodi per la soluzione di alcune specie soltanto di equazioni, e sono l'equazioni Lineari, e l'equazioni Omogenee.

1342. Sia un'equazione lineare generalmente espressa per $y=\frac{a+bx+cx^2+dx^3 \text{ \&c.}}{f+gx+hx^2+ix^3 \text{ \&c.}}$.

Per

Per determinare i valori di x, che sodisfacciano a quest' equazione, si ponga $f+gx+hx^2+ix^3$ &c. $= \mathcal{A}$, onde si abbiano le due equazioni ..... $a+bx+cx^2+dx^3$ &c. $= \mathcal{A}y$, $f+gx+hx^2+ix^3$ &c. $=\mathcal{A}$. Da questo si elimini la x e si avrà un' equazione finale della forma $C+\mathcal{A}B=0$, nella quale C è funzione dei coefficienti dati, B è una funzione razionale intera dei medesimi coefficienti di y, e di $\mathcal{A}$; ed $\mathcal{A}$ è una quantità indeterminata.

E' chiaro che affine che ella sussista dev' esser C divisibile per $\mathcal{A}$, e perciò i valori indeterminati di $\mathcal{A}$ debbono essere i divisori di C. Trovato così $\mathcal{A}$, non si avrà, che da sciogliere l' equazione ..... $\mathcal{A}-f-gx-hx^2-ix^3$ &c. $=0$. Le radici razionali di questa sodisfaranno alla proposta, e nel tempo stesso daranno i valori corrispondenti di y, con che sarà sciolto il problema.

Esempio. Si debba sciogliere il problema indeterminato, che conduce all' equazione finale ....,

$$y = \frac{a+bx+cx^2}{f+gx+hx^2}.$$

Si avranno per il detto di sopra l' equazioni $x^2+gx+hx^2=\mathcal{A}$, $a+bx+cx^2=\mathcal{A}y$. Per ottenere l' equazione eliminata immediatamente, sostituiscansi nella formola del (*n.* 1034.) i valori di a, b, c, a^1, b^1, c^1, avvertendo che nel caso attuale si ha $c=a-\mathcal{A}y$, e $c^1=f-\mathcal{A}$, e si avrà senza più $(ha-h\mathcal{A}y-c\mathcal{A}+cf)^2-(hb-cg)(ga-g\mathcal{A}y-b\mathcal{A}+bf)=0$ che si riduce alla forma seguente ..... $(a^2h^2-abgh+ab^2h-b^2fh+acg^2-abcg+bcfg+c^2f^2+2acfh)+(2ab^2+b^2\mathcal{A}+2ch\mathcal{A}-2chf-cg^2)\mathcal{A}y+(c^2\mathcal{A}-2c^2f-2ach)\mathcal{A}=0$, equazione che ha le qualità divisate nell' equazione $C+\mathcal{A}B=0$. Si pren-

da

da per A un divisore del primo termine, e si proceda come sopra.

1343 *Scol.* Se nell' equazione $y = \frac{a+bx+cx^2}{f+gx+hx^2}$, fosse $g = 0$, ed $h = 0$, si vede che vi si potrebbe sodisfare con tutta facilità. Supposto che $x = A$ sia una soluzione, per aver tutte le altre basterebbe sodisfare all' equazione $x = A \pm mf$, m essendo un numero intero qualunque.

1344. Venendo all' equazioni omogenee, sia l'equazione generale $ay^m + by^{m-1}x + cy^{m-2}x^2 \ldots\ldots + dy^{m-3}x^3$ &c. $= A$ numero intero. Si ponga $x = ny$, onde si abbia la trasformata $(a + bn + cn^2 + dn^3$ ec.$)\, y^m = A$. Si divida l'omogeneo A in due fattori B, C, e l'equazione addotta si metta sotto la forma $\frac{(a+bn+cn^2+dn^3 \text{ \&c.})}{B} y^m = C$. Fatto questo si dia ad n un valore qualunque, purchè sia opportuno a rendere $a + bn + cn^2 + dn^3$ &c. divisibile per B perchè non si può supporre indifferentemente y divisibile per B. Trovato questo valore di n, dicasi $\frac{a+bn+cn^2}{B}$ &c. $= E$, e si avrà $y = \sqrt[m]{\frac{C}{D}}$, e con ciò i valori di x dell' equazione $x = ny$.

1345. Trovato un valor di y, se ne possono trovare infiniti, perchè supposto $= K$ il valore di n che lo ha somministrato, si avrà in generale ....,.. $y = K \pm mB$, e quindi $x = n(K \pm mB)$.

1346. Conviene però quì avvertire due cose, e sono I.° Che se le soluzioni si vogliano in interi, deve aversi sempre $\frac{C}{D} = E$ numero intero, onde C deve

dev' essere un multiplo del denominatore D; 2.° che volendosi le soluzioni razionali, bisogna che da $\frac{C}{D}$ si possa estrarre la radice $n.^{sima}$

1347. Queste condizioni riescono soverchiamente incomode, e purchè l'equazione proposta non sia molto semplice, e di un grado poco elevato, rendono il metodo esposto eccessivamente operoso, e difficile. Noi perciò passiamo ad un altro Metodo, affinchè nell' occasione si possa fare scelta di quello che piú si reputi opportuno.

PORISMA I.

1348. Data un' equazione $\mathcal{A} = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2$ &c. $+ Ku^n \ldots (\mathcal{P})$, nella quale $\mathcal{A}$, B &c. K sieno numeri qualunque interi dati, e t ed u due indeterminate, che possano essere espresse per dei numeri interi, e delle quali una sia prima ad $\mathcal{A}$; si debba ridurre ad un 'altra equazione della medesima specie, nella quale sia l'omogeneo di comparazione $= 1$.

Soluzione. Essendo t, u, ed $\mathcal{A}$ numeri interi, ed u e $\mathcal{A}$ primi, si possono trovar sempre due numeri x, y tali che sia $t = ux - \mathcal{A}y$ (*n.* 1246.). Si sostituisca questo valore di t in $(\mathcal{P})$, e si avrà la trasformata che segue . . . . . .

$$\mathcal{A} = \alpha u^n - \beta \mathcal{A} u^{n-1} y + \gamma \mathcal{A}^2 u^{n-2} y^2 - \text{ &c. } \pm \xi . \mathcal{A}^n y^n,$$

posto $\alpha = Bx^n + Cx^{n-1} + Dx^{n-2}$ &c. $+ K$;

$$\beta = nBx^{n-1} + (n-1)Cx^{n-2} + (n-2)Dx^{n-3} \text{ \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n(n-1)}{2} Bx^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} Cx^{n-3} \text{ ec.}$$

Si divida la trasformata esposta per $\mathcal{A}$, e si avrà

vrà $1 = \frac{au^n}{\mathcal{A}} - \beta u^{n-1} y + \gamma u^{n-2} y^2$ &c. $\pm \xi \mathcal{A}^{n-1} y^n$;

Da questa si vede ; che $\frac{au^n}{\mathcal{A}}$ dev' esser un numero intero ; ma n ed $\mathcal{A}$ sono numeri primi , e perciò anche u^n ed $\mathcal{A}$; dunque α deve esser divisibile per $\mathcal{A}$. Pongasi per tanto $\frac{\alpha}{\mathcal{A}} = \mathcal{P}$, $-\beta = \mathcal{Q}$, $\gamma\mathcal{A} = R$, $-\delta\mathcal{A}^2 = S$ &c. $\pm \xi \mathcal{A}^{n-1} = V$ e si avrà l'equazione richiesta $1 = \mathcal{P}u^n + \mathcal{Q}u^{n-1}y + Ru^{n-2}y^2$ &c. $+Vy^n$ .... (2)

1349. E' da osservarsi qui , che x non è altro , che il secondo membro dell' equazione (P) , dove sia fatto $t = x$, $u = 1$, potendo x , per il detto di sdpra , esser preso $< \frac{\mathcal{A}}{2}$. Di qui ne deriva che l'equazione (P) non può sussistere nell' ipotesi del problema , senza che , posto $u = 1$, si possa trovare un valore intero di t , positivo ò negativo $< \frac{\mathcal{A}}{2}$, che rende il secondo membro della medesima divisibile per il primo $\mathcal{A}$. Per decidere per tanto della possibilità dell' equazione (P) , converrà tentare per t tutti i valori interi $< \frac{\mathcal{A}}{2}$, e se non se ne trovi alcuno , che sodisfaccia alla condizione divisata , dovrà concludersi , che nell' equazione (P) , t , ed u non possono essere interi , primi fra loro , ed all' omogeneo A . Nel caso , che se ne trovi qualcheduno , si concluderà il contrario .

PORISMA II.

1350. Data un' equazione $Pu^n + Qu^{n-1}t + Ru^{n-2}t^2$ &c. $+Vt^n = 1 \ldots (R)$, nella quale P, Q &c. V sieno numeri interi dati, si vogliono tutti i valori interi di u, e t, che possono soddisfarci.

Soluzione. Prima di procedere alla soluzione, osservo che l' equazione proposta non può sussistere nell' ipotesi di t, ed u interi, qualora P, Q &c. V abbiano un comun divisore, e di qui deduco, che u, e t debbono esser primi fra loro, altrimenti il primo membro sarebbe divisibile per la potenza $n.^{sima}$ di tal comun divisore e perciò non potrebb' esser eguale all' unità.

Ciò premesso, sieno u, ed y due numeri interi, e primi, che soddisfacciano all'equazione (R). Dividasi quest' equazione per y^n, e pongasi $x = \frac{u}{t}$ e si avrà $Px^n + Qx^{n-1} + Rx^{n-2}$ &c. $+V = \frac{1}{t^n} \ldots (S)$. Dunque se si consideri l' equazione a due variabili $Px^n + Qx^{n-1} + Rx^{n-2}$ &c. $+ V = z \ldots (T)$, che appartiene ad una curva parabolica, della quale sia x l' ascissa, e z l' ordinata, converrà che posto $x = \frac{u}{t}$ sia $z = \frac{1}{t^n}$, cioè che all' ascissa $\frac{u}{t}$ corrisponda l' ordinata $\frac{1}{t^n}$. Ora se quest'ordinata non è un minimo, è chiaro che la curva, ò da una parte, ò dall' altra dovrà andare approssimandosi all' asse, ò sia al minimo.

Sia

Sia dunque a l'ascissa, che corrisponde al minimo. Tutte le ordinate, che apparterranno a delle ascisse comprese fra $\frac{u}{t}$, ed a dovrann' essere minori di $\frac{1}{t^n}$, e del medesimo segno di $\frac{1}{t^n}$, cioè del medesimo segno che hanno i valori, che si comprendono fra o ed $\frac{1}{t^n}$; onde, allorchè z avrà un valore $> \frac{1}{t^n}$, ò di segno differente, cioè un valore, che non cada fra o ed $\frac{1}{t^n}$, x non potrà cadere fra $\frac{u}{t}$ ed a. Ora, siccome l'ascissa $x = a$ dee corrispondere a $z=o$, ovvero a $z=$ ad un minimo, si vede che a non può essere che una radice dell' equazione $z = o$, o sia di $Px^n + Qx^{n-1} +$ &c. $+V = o$, ò dell' equazione $\frac{d.z}{d.x} = o$, vale a dire di nPx^{n-1}, $(n-1)\,Qx^{n-1}$ &c. $+T = o$, che sono l'equazioni delle quali si potranno avere tutti i valori di a.

Si potranno dunque trovare col metodo delle frazioni continue due serie di frazioni, le quali convergano verso a; $\frac{u}{t}$ sarà una di queste. Provò prima di tutto, che $\frac{u}{t}$ deve avere il segno stesso di

a. Essendo per ipotesi a positiva, se $\frac{u}{t}$ sia negativa, $\frac{0}{1}$ sarà più vicino ad a che $\frac{u}{t}$; dunque, poichè $\frac{0}{1}$ cade fra $\frac{1}{t^n}$ ed a, se in (T) facciasi $x = \frac{0}{1}$, bisogna che il valore corrispondente di z cada fra $\frac{1}{t^n}$ e o; ma posto $x = o$, ha $z = V$; dunque essendo V numero intero (*ipot.*) è impossibile che possa cadere fra o e $\frac{1}{t^n}$; dunque &c.

Dimostro adesso che $\frac{u}{t}$ dev'essere una frazione di una delle due serie divisate.

Siccome $\frac{u}{t}$ può esser $< , e > a$, supponghiamo $\frac{u}{t} < a$, e dico che $\frac{u}{t}$ dev'essere una frazione della serie composta dalle frazioni $< ^{ia}$.

Osservo a quest'oggetto, che siccome la serie divisata va all'infinito, e i denominatori delle frazioni vanno crescendo, t deve trovarsi eguale a qualcheduno di tali denominatori, ò deve cadere fra due di essi consecutivi.

Sieno $\frac{l}{M}$, $\frac{m}{M}$ due frazioni consecutive della suddetta serie, e t cada, se è possibile, fra L, ed M. Sostituendo per x in (T), $\frac{u}{t}$, $\frac{l}{L}$, la prima sosti-

stituzione darà $z = \frac{1}{t^n}$, e la seconda $z = \frac{\alpha}{L^n}$, α essendo $Pl^n + Ql^{n-1}L + Rl^{n-2}L^2$ &c. onde α sarà intero. Dunque avendosi $t > L\frac{\alpha}{L^n}$ cadrà fuori dei limiti o, $\frac{1}{t^n}$, e perciò $\frac{l}{L}$ cadrà fuori di $\frac{l}{L}$ ed a. Perchè poi $\frac{l}{L}$, ed $\frac{u}{t}$ sono ambedue $< a$ (*ipot.*) converrà che $\frac{u}{t}$ cada fra $\frac{l}{L}$ ed a. Ma perchè $M > t$ $\frac{m}{M}$ si avvicina più ad a che ad $\frac{u}{t}$; onde $\frac{m}{M}$ dee cadere fra $\frac{u}{t}$ ed a. Dunque $\frac{u}{t}$ cadrà fra $\frac{l}{L}$ ed $\frac{m}{M}$, lo che non può avvenire per la natura delle frazioni continue. Dunque t non può cadere fra due denominatori consecutivi. Bisognerá dunque che sia equale a qualcheduno di essi. Abbiasi $t = \pm L$; dico che sarà $\frac{u}{t} = \frac{l}{L}$. Di fatto si è veduto che $\frac{\alpha}{L^n}$ non può cadere fuori dei limiti o, e $\frac{1}{t^n}$; ma essendo α intero, $\frac{\alpha}{L^n}$ non può entrare in detti limiti finchè $t = \pm L$; dunque deve aversi $\frac{1}{t^n} = \frac{\alpha}{L^n}$; dun-

que

que il valor di z, che corrisponde ad $x = \frac{u}{t}$ dev' essere uguale a quello, che corrisponde ad $x = \frac{l}{L}$ nell'equazione (T); dunque i due valori di x saranno eguali, cioè si avrà $\frac{u}{t} = \frac{l}{L}$; dunque se la frazione $\frac{u}{t}$ sia $< a$, non può essere, che una delle frazioni componenti la serie crescente, e che converge verso a.

Si proverà nel modo stesso, che qualora sia $\frac{u}{t} > a$ dev' esser una delle frazioni componenti l' altra serie decrescente, che converge verso a. Dunque $\frac{u}{t}$ dev' essere una delle frazioni componenti le due serie, purchè non sia eguale ad a, lo che non può avvenire, che nel caso, in cui a sia radice dell'equazione $d.\ z = o$; perchè se a fosse radice dell'equazione $z = o$, il secondo membro di (R) diverrebbe $= o$, mentre dev' essere $= 1$.

Ne segue adesso, che essendo $\frac{u}{t} = \frac{l}{L}$, e u e t, non meno che l ed L numeri primi fra loro, si debba avere in generale $u = \pm l$, $= \pm L$.

Si concluda pertanto che per ottenere i valori di u, e t (siccome a dev' essere una radice di $z = o$, ò di $dz = o$) bisogna cercare tutte le radici di quest' equazioni. Da ciascuna di esse si avranno due serie di frazioni, come quelle già divisate, e si avranno così

così tutti i numeri interi, che possono prendersi per u, e t, e non resterà che provarli successivamente, per determinar quelli, che possono soddisfare in effetto all'equazione proposta (R). Sia ora

1351. *Problema*. Sciogliere in numeri interi l'equazione $\mathcal{A} = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2$ &c. $+ Ku^n$, $\mathcal{A}$, B, C &c. essendo numeri interi dati.

Soluzione. Suppongo, come si può sempre, che B, C &c. K non abbiano divisor comune, come pure u, e t, a meno che $\mathcal{A}$ non sia divisibile per una potenza $n.^{sima}$. Qualora sia $\mathcal{A}$ divisibile per r^n, u, e t ò saranno primi fra loro, o divisibili ambedue per r. Nel secondo caso si faccia $t = rt'$, $u = ru'$, ed $\mathcal{A} = r^n\mathcal{A}'$, e nella trasformata divisa per r^n, u', e t' saranno primi fra loro; onde si può sempre ricondurre l'equazione al caso, in cui sieno le indeterminate numeri primi fra loro.

Consideriamo adesso il caso, in cui u, ed $\mathcal{A}$ sieno dotati di un comun divisore, e sia s il massimo. Bt^n dovrà esser divisibile per s; ma r, e perciò t^n non può esserlo, perchè è primo ad u (*ipot.*); dunque bisogna che lo sia B, cioè che sia s divisor comune di A, e di B. Quindi se $\mathcal{A}$, e B sieno primi fra loro, lo saranno anche A ed u; ma se $\mathcal{A}$, e B ammettano un comun divisore s, u potrà essere ò non essere multiplo di s. Nel primo caso si farà $u = su'$, $\mathcal{A} = s\mathcal{A}'$, e nella trasformata divisa per s, A', ed u' saranno primi fra loro. Nel secondo caso $\mathcal{A}$ ed u saranno primi di lor natura. Così l'equazione sarà ridotta alla forma dell'equazione (P) del Porisma I, e si scioglierà col metodo ivi esposto. Si comincierà dunque da cercare un valore di t positivo, ò negati-

vo

vo $< \frac{A}{2}$, che renda la funzione $Bt^n + Ct^{n-1}$ &c. $+ K$ divisibile per A; e se fra i numeri interi $< \frac{A}{2}$ non se ne trova alcuno che sodisfaccia a questa condizione, l'equazione proposta non ammetterà soluzione in interi (*n.* 1349.); ma trovandosene qualcheduno, si chiamerà ciascuno di essi x, e si sostituirà $ux - Ay$ nell'equazione proposta in luogo di t' con ciò ella diverrà divisibile per A, e fatta la divisione, sarà senza più ricondotta ad esser della forma dell'equazione (*T*) del Porisma II., onde non si avrà, che da applicarvi il metodo in essa impiegato.

ANALISI

PARTE IV.

CAPO IV.

Dell' Analisi Geometrica indeterminata in generale.

1352. La soluzione dei problemi geometrici indeterminati consiste nella descrizione del Luogo geometrico, nel quale sieno compresi tutti i valori, che possono sodisfare al medesimo. Noi passiamo ad occuparci in questa ricerca, la quale porta in fronte il carattere dell'eleganza, e dell' invenzione, e merita di essere sviluppata con tutta la possibile generalità.

1353. I problemi geometrici indeterminati possono esser di tre ordini. Al prim' ordine appartengono quelli, per la di cui soluzione è dato un numero di condizioni minore di un' unità del numero dell' incognite.

Si riferiscono al second' ordine quelli, che sono accompagnati da un numero di condizioni minore di due unità del numero delle incognite.

Quelli diconsi finalmente di terz' ordine, per i quali si ha un numero di equazioni minore di tre unità del numero delle incognite.

I primi hanno per Luogo geometrico la linea. I secondi hanno per Luogo geometrico la superficie. I terzi hanno per Luogo geometrico il solido.

Dei problemi, che si riferiscono alle superficie, ed

ed ai solidi, ne parleremo quanto basta, dopo di aver trattato diffusamente dei problemi, che appartengono al Luogo geometrico lineare.

SEZIONE I.

Soluzione dei problemi geometrici indeterminati di primo grado.

1354. I problemi di questo genere si contengono generalmente nell'equazione lineare $ax \pm by \pm c = o$. Vediamo come si determini il Luogo geometrico di quest'equazione.

Sia AB la linea delle ascisse (Fig.ª 99.) e AD quella dell'ordinate, che faccia colla prima un angolo qualunque, e supponghiamo

Caso I. Che nell'equazione generale non manchi verun termine.

Trasponendo l'omogeneo di comparazione in un membro, onde abbiasi $\mp c = qx \pm by$, si vede che c deve rappresentare una linea retta. Per determinarne la posizione, osservo che basta determinar quella di due suoi punti, per esempio di quelli, nei quali ella incontra i due assi AB, AD. A quest'effetto pongo sulle prime $x = o$ ed ottengo $\pm y = \mp \frac{c}{b}$; pongo quindi $y = o$, e trovo $x = \mp \frac{c}{a}$. Prendo pertanto sull'asse dell'ordinate AD una parte $AE = \frac{c}{b}$, avvertendo di prenderla dalla parte positiva, se i segni dell'equazione data sieno tutti positivi, di prenderla dalla par-

parte negativa, come pure l'ascissa; se, essendo a, e b positive, sia c negativa, di prendere AE positiva, in guisa che corrisponda all'ascissa negativa, se sieno negative b, e c, ed avvertendo finalmente di prendere AE negativa, cosicchè corrisponda all'ascissa positiva, se sia b solamente negativa, computando sempre la combinazione dei segni nell'equazione $\mp c = ax \pm by$.

Determinata così l'ordinata A, devesi prendere sull'asse $AC = \mp \frac{c}{a}$, e questa secondo la direzione accennata qui sopra, parlando di AE. Fissati i punti C, E non rimane, che da condursi la retta CE. Ella è il luogo geometrico dell'equazione proposta. Per vederlo basta condurre da un punto qualunque della CE, una parallela all'asse AD, e risciogliere in proporzione i due triangoli simili, che ne risultano.

Caso 2.° Che uno dei tre termini ax, by, c sia $= o$.

Se c sia $= o$, in questo caso $\mp \frac{c}{a}$, $\mp \frac{c}{b}$ sono eguali a zero, e perciò anche AC, AE, e la retta EC passa per l'origine dell'ascisse. Quantunque però AC, ed AE sieno eguali a zero, $\mp \frac{c}{a}$, e $\mp \frac{c}{b}$ conservano fra di loro il rapporto di $b:a$, il che basta per determinare la posizione della retta rappresentata dall'equazione $ax \pm by = o$.

Dimostro primieramente che $\frac{o}{a}$ stia a $\frac{o}{b}$ :: b : a. Sup-

Suppongasi che c sia infinitamente piccolo, ed uguale a $d.z$, onde si abbia $\frac{dz}{a} : \frac{dz}{b} :: b : a$, la quale è una proporzione evidente. Si divida per $d.z$, e suppongasi che dz sia giunto al limite, e si avrà $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: \frac{b}{0} : \frac{a}{0}$ cioè $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: b\infty : a\infty$, dividendo tutti i termini per ∞, $\frac{1}{a.\infty} : \frac{1}{b.\infty} :: b : a$, cioè $\frac{0}{a} : \frac{0}{b} :: b : a$.

Dico adesso che avendosi il rapporto di AC ad AE rappresentato per $b : a$, si può determinar la posizione della retta EC (Fig.ª 100.); sia infatti l'ascissa $Ab = a$, ed $Ac = b$ sull' asse dell' ordinate, ambedue positive, ò negative se a, e b hanno segno diverso, ed una positiva, e l'altra negativa, se hanno il medesimo segno.

Si conduca la retta cb, ed AM parallela a cb, e sarà AM la retta espressa dall' equazione $ax \pm by = 0$. Per vederlo si abbassi l'ordinata MP e i triangoli simili APM, Abc daranno $x : y :: \mp b : a$, cioè $ax \pm by = 0$. Se $b = 0$, $\frac{c}{b} = AE = \infty$ (Fig. 99.), e CE risulta parallela ad AD : quindi la retta cercata è parallela all' asse dell'ordinate.

Se $a = 0$, $\frac{c}{a} = AC = \infty$, ed EC è parallella all'asse delle ascisse.

Il terzo caso, che manchino due termini non ha cosa alcuna che meriti considerazione.

SE-

SEZIONE II.

Soluzione dei problemi geometrici indeterminati di secondo grado.

1355. Sia l'equazione generale di secondo grado a due incognite $ay^2+bxy+cx^2+dy+fx+ha^2=0$, la quale si mette sotto forma omogenea, perchè appartiene ad una funzione geometrica.

Per determinare i luoghi geometrici, che ella contiene, e per fissare insieme le condizioni, dalle quali dipende, che ella ne contenga piuttosto uno, che un altro, supposto che non sia mancante di nessun quadrato y^2, x^2, convien prima di tutto liberarla dal secondo termine, sì per rapporto ad y, che per rapporto ad x.

1356. A quest'effetto la riduco alla forma $y^2+\left(d+\frac{bx}{a}\right)y+\frac{cx^2}{a}+\frac{fx}{a}+ha=0$ ... $(\mathcal{A})$.

Pongo quindi $y+\frac{1}{2}d+\frac{bx}{2a}=z$, e quadrando ottengo $y^2+\left(d+\frac{bx}{a}\right)y+\frac{1}{4}d^2+\frac{bdx}{2a}+\frac{b^2x^2}{4a^2}=z^2$. Sostituisco il valore di $y^2+\left(d+\frac{bx}{a}\right)y$ dedotto da quest'ultima equazione, nell'equazione $(\mathcal{A})$, e fatta la trasposizione trovo ..

$z^2=\frac{1}{4}d^2+\frac{bdx}{2a}+\frac{b^2x^2}{4a^2}-\frac{cx^2}{a}-\frac{fx}{a}-ah$, e moltiplicando per $4a^2$, e raccogliendo i termini che sono moltiplicati per le medesime potenze di x

$4a^2z^2=a^2d^2-4a^3b+(2abd-4acf)x+(b^2-4ac)x^2$. Ora siccome le lettere, a, b, c, d &c. rappresentano quantità cognite, si, può per abbreviare, supporre $a^2d^2-4a^3b=r$, $2abd-4acf=q$, e $b^2-4ac=m$. Con questo l'equazione diviene $4a^2z^2=r+qx+mx^2$ dove m, q, r posson esser positive, ò negative.

1357. Facciamo adesso svanire il secondo termine per rapporto ad x. Avremo primieramente $x^2+\frac{q}{m}x+\frac{r}{m}=\frac{4a^2z^2}{m}$ ... (*B*). In vece però di fare secondo il solito $x+\frac{q}{2m}$ eguale ad una nuova incognita t, facciasi $=\frac{qt}{2mn}$, dove n sia una quantità arbitraria, che la determineremo fra poco, ed abbiasi $x+\frac{q}{2m}=\frac{qt}{2mn}$. Quadrando ne viene $x^2+\frac{qx}{m}+\frac{q^2}{4m^2}=\frac{q^2t^2}{4m^2n^2}$, ò sia $x^2+\frac{qx}{m}=\frac{q^2t^2}{4m^2n^2}-\frac{q^2}{4m}$. Si sostituisca nell' equazione... (*B*) e si avrà $\frac{q^2t^2}{4m^2n^2}-\frac{q^2}{4m^2}+\frac{r}{m}=\frac{4a^2z^2}{m}$ ... (*C*).

1358. Avendo così ridotta l'equazione generale di secondo grado, si vede che non essendo eguale à zero alcuna delle quantità a, m, q, r, l'equazione (*C*) appartiene ad un Elisse, ò ad un'Iperbola.

1359. Per distinguere questi due casi, si liberi dal coefficiente il primo membro dell' equazione

ne (*C*), onde si abbia $z^2 = \frac{q^2t^2}{16a^2mn^2} - \frac{q^2}{16a^2m}$ ....

$+\frac{r}{4a^2} = \frac{q^2}{16a^2mn^2}\left(t^2 - n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2}\right)$ ... (*D*).

E' manifesto che in quest'ultima forma, le quantità q, n, a essendo inalzate al quadrato, non può introdursi verun cangiamento, che allorquando m, ò r sien di segno negativo; anzi, poichè il segno negativo di r punto non influisce nel cangiamento del segno che appartiene ai quadrati z^2, t^2, la curva non può soffrir mutazione, neppur mutandosi il segno di r. Tutto perciò si riduce ad osservare, qual mutazione possa in essa introdurre il diverso segno di m. Ora si vede che essendo m negativa; l'equazione (*D*) prende la forma

$$z^2 = \frac{q^2}{16a^2mn^2}\left(n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2} - t^2\right) \ldots (E)$$

Dunque se m sia positiva si ha l'equazione (*D*) che appartiene all'Iperbola; e se m sia negativa si ha l'equazione (*E*), che appartiene all'Ellisse. Ma m si è supposto di sopra $= b^2 - 4ac$. Dunque l'equazione generale di secondo grado rappresenta un'Ellisse, quando è $b^2 < 4ac$, e rappresenta un'Iperbola, quando b^2 è $> 4ac$: cioè nel primo caso, quando il quadrato del coefficiente di xy è minore del rettangolo dei coefficienti che appartengono ai termini y^2, x^2; e nel secondo caso, quando il suddetto quadrato è maggiore del divisato rettangolo.

1360. Questa regola generale ammette una sola eccezione, ed ha luogo quando r è negativa, e $> \frac{q^2}{4m}$. Difatto in questo caso la quantità

n^2

$n^2+\frac{4mn^2r}{q^2}$ diviene $n^2-\frac{4mn^2r}{q^2}=n^2\left(1-\frac{4mr}{q^2}\right)$

forma, che qualora sia $\frac{4mr}{q^2}>1$, ovvero $r>\frac{q^2}{4m}$, ella è negativa, e perciò somministra per z dei valori tutti immaginarj, il che rende immaginaria la curva.

1361. Ritornando adesso alla condizione da cui dipende, che l'equazione generale rappresenti un' Iperbola, giova osservare che b^2 può esser $>4ac$, in due casi particolari, e sono, che abbiasi $a=0$, ò $c=0$, ovvero che abbiasi $a=0$, e $c=0$. Quindi se manchi nell'equazione generale uno dei quadrati y^2, x^2, ovvero se manchino ambedue, essa rappresenta un lungo Iperbolico. Nel primo caso la cosa è manifesta; nel secondo si può rendere tale col raziocinio seguente.

1362. Essendo a, e c eguale a zero, l'equazione generale si riduce alla forma $\alpha xy+\beta\gamma y-\delta\varepsilon x-\lambda\mu\nu=0, \alpha, \beta, \gamma$, &c. potendo essere indifferentemente positive, o negative. Si liberi il prodotto xy dal coefficiente, onde sia $xy+\frac{\beta\gamma}{\alpha}.y-\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}.x-\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha}=0$. Si ponga $y-\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}=z$, e si avrà $y=z+\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}$. Si sostituisca, e ne verrà $xz+\frac{\beta\gamma z}{\alpha}+\frac{\beta\gamma\delta\varepsilon}{\alpha^2}-\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha}=0$; si faccia adesso $x+\frac{\beta\gamma}{\alpha}=t$, e la precedente si ridurrà a $tz+\frac{\beta\gamma\delta\varepsilon}{\alpha^2}-\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha}=0$. Pongasi $\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha}-\frac{\beta\gamma\delta\varepsilon}{\alpha^2}=K^2$,

e si

e si avrà finalmente $tz=K^2$, equazione che appartiene all'Iperbola riferita agli asintoti, essendo computate le ascisse dopo il centro, su di uno degli asintoti, essendo le ordinate parallele all'altro asintoto, ed essendo K^2 la potenza.

1363. Fin qui abbiamo supposto che b^2 sia ò $< ò > 4ac$; Rimane da considerarsi il caso in cui abbiasi $b^2=4ac$. In questo caso, facendo svanire il secondo termine dell'equazione generale, per rapporto ad y, ella si riduce alla forma $4a^2z^2 = r+qx$, di dove si ha $z^2 = \frac{r+qx}{4a^2}$. Si faccia $\frac{r+qx}{4a^2} = nu$, dove sia n una indeterminata, che si può sempre determinare nei casi particolari, ed u sia una nuova incognita, e ne risulterà $z^2 = nu$, equazione, che appartiene manifestamente alla Parabola.

1364. Si vede finalmente che se abbiasi $b^2=0$, e nel tempo stesso $c=0$, siccome si ha eguaglianza fra b^2, e $4ac$, l'equazione generale appartiene ugualmente alla Parabola, perchè tolto il secondo termine per rapporto ad y, in virtù dell'esposto raziocinio, risulta la trasformata della forma $4az^2=r+q'x$, come sopra.

1365. Ma il circolo è egli escluso totalmente dalla formola generale? Vediamolo.

Siccome il circolo è una specie particolare di Ellisse, affinchè possa contenersi nell'equazione generale, conviene che l'equazione dell'Ellisse trovata di sopra $z^2 = \frac{q^2}{16a^2mn^2}\left(n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2} - t^2\right)$,

per alcuni valori particolari delle indeterminate, possa prender la forma di equazion circolare: Si paragoni per tanto l'equazione suddetta coll'equazione semplicissima dell'Ellisse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ onde si abbia $\frac{b^2}{a^2}=\frac{q^2}{16a^2mn^2}$. Affinchè l'Ellisse divenga Circolo, è chiaro che deve aversi $a=b$, e perciò $\frac{q^2}{16a^2mn}=1$. Oltre di questo, che l'angolo $MC\mathcal{N}$ (fig.ª 101.) in cui $M'S$ sia diametro, ed $\mathcal{N}C$ un'ordinata dell'Ellisse, che attualmente si considera obliquangola comunque, dev'esser retto. Per vedere una 3.ª condizione si conduca una segante RO perpendicolare all'ordinata $\mathcal{N}C$, che incontri il diametro CM' in O. Dall'intersezione G verso O si prenda una parte $GA=\frac{q}{2m}$, e si abbassi una retta AB parallela ad $\mathcal{N}C$, che incontri il diametro in B. Per B si conduca la BD indefinita, e parallela ad RO. Sulla BD si prenda la BK tale, che la KL condotta parallelamente ad $\mathcal{N}C$, finchè incontri il diametro in L, stia a $BK::\frac{1}{2}b:a$. Fatto questo, à motivo dell'angolo retto BCD si avrà $BC^2+CD^2=BD^2=AG^2$. Ma condotta un'altra ordinata $M\mathcal{Q}$ parallela ad $\mathcal{N}C$, si ha, $BC:C\mathcal{Q}::AG:GP$, cioè $BC:t::\frac{q}{2m}:\frac{qt}{2mn}$, perchè posta l'origine delle ascisse in A, risulta $GP=AP-AG=x-\frac{q}{2m}=\frac{qt}{2mn}$

num.

(*n.*1359.). Dunque si ha $BC=n$. Ma dall' equazione $\frac{q^2}{16a^2mn^2}=1$ si ha $n^2=\frac{q}{16a^2m}$; dunque $BC^2=\frac{q^2}{16a^2m}$. Finalmente dalla somiglianza de' triangoli BKL, BDC si ha $BK:KL::BD$ ò $AG:CD$, cioè $a:\frac{1}{2}b::\frac{q}{2m}:CD=\frac{bq}{4am}$; sostituiscansi i valori, di BC, e CD nell' equazione $BC^2+CD^2=AG^2$, e si avrà $\frac{q^2}{16a^2m}+\frac{b^2q^2}{16a^2m^2}=\frac{q^2}{4m^2}$, e di qui $m+b^2=4a^2$; ma essendo m negativa si ha $b^2-4ac=-m$, ò sia $m=4ac-b^2$; dunque deve aversi $4a^2-b^2=4ac-b^2$, cioè $4a^2=4ac$, ed $a=c$; dunque se i coefficienti dei due quadrati y^2, x^2, sieno eguali, l'equazione generale può appartenere al Circolo, altro non richiedendonsi se non che l'angolo delle coordinate sia retto.

1366. Avendo così determinati i luoghi geometrici, che si contengono in un'equazione generale di secondo grado, rimane da vedersi come nei casi particolari si debba uno diportare per costruirli. Cominciamo dall' Ellisse.

1367. Delle due equazioni, che si sono avute per togliere i secondi termini dall' equazion generale, $y+\frac{1}{2}d+\frac{bx}{2a}=z$; $x-\frac{q}{2m}=\frac{qt}{2mn}$, la la seconda per la supposizione attuale, che m sia negativa, dovrebbe ricevere nel secondo membro il segno negativo; ma supposto che l'indeterminata n sia anch' essa negativa, si può lasciare nella forma attuale. Passiamo à costruirle ambedue insieme

sieme, onde aver la posizione dei diametri conjugati.

La prima $y + \frac{1}{2}d + \frac{bx}{2a} = z$ dimostra che per avere z, bisogna aumentar ciascuna delle indeterminate y della quantità $\frac{1}{2}d + \frac{bx}{2a}$. A quest' effetto per il punto A, origine delle ordinate (Fig.ª 10) sia la linea $AB = \frac{1}{2}d$, parallela alle ordinate y, NG, PM &c. Per il punto B si conduca BKI parallela alla linea AR, sulla quale si computano le x, ed avendo presa ad arbitrio la BK, tale però che la KL parallela alle y, sia a $BK :: \frac{1}{2}b : a$, se conducasi per B, ed L, l' indefinita BLQ; le ordinate contate dall' asse SM', contate dai punti Q, saranno X. i valori di z. Di fatto si ha $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = y + \frac{1}{2}d + IQ$. Ora i triangoli simili BKL, BIQ danno $BK : KL :: BI$, ò $AP : IQ$, vale a dire $a : \frac{1}{2}b :: x : IQ = \frac{bx}{2a}$, dunque $QM = y + \frac{1}{2}d + \frac{bx}{2a} = z$.

1398. Poichè le z si contano dopo la linea IQ, ne segue che le z debbano contarsi sulla linea BLQ, e che il punto dell' origine delle ascisse debba essere il centro, e che QLB sia la direzione di uno dei diametri conjugati. Per determinar detto centro, io osservo, che se prendasi sopra la linea AP

una

una parte $AG = \frac{q}{2m}$, il residuo GP dev' essere, come si è veduto di sopra, $= x - \frac{q}{2m} = \frac{qt}{2mn}$

Per il punto G sia NGC parallela alle PM ed il punto C, nel quale incontra la $L\mathcal{Q}$, sarà l' orgine delle t, e perciò il centro. Di fatto dovendo contarsi le t sopra $L\mathcal{Q}$, quando è $GP=o$, dev' esser $\frac{qt}{2mn}$ cioè $t=o$, il che non può avvenire se l'origine delle t non sia nel centro C. Se dunque le $\mathcal{Q}M$ rappresentino le z, le $C\mathcal{Q}$ debbono rappresentar le t.

1369. Di quì è facile derivare il valor di n, che si è trovato di sopra eguale a BC. Pongasi questo valore nell' equazione (E) dell' Ellisse (*n.*1359.), ed ella apparterrà in questa maniera ai diametri conjugati, di cui le direzioni sono, $B\mathcal{Q}$, $C\mathcal{N}$.

1370. Rimane soltanto, per poterla descrivere, che si determini la grandezza dei diametri conjugati, l' angolo $BC\mathcal{N}$, che forman' essi tra loro, essendo giá determinato per le operazioni precedenti.

Ora i diametri suddetti si hanno facilmente dal paragone dell' equazione $z^2 = \frac{q^2}{16a^2mn^2}\left(n^2 + \frac{8mn^2r}{q^2} - t^2\right)$ coll'equazione generale dell' Ellisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; con questo si hanno l'equa-

quazioni $\frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2}{16a^2mn^2}$, $a^2 = n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2}$, e da queste si deduce $a = \sqrt{n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2}}$, e $b = \sqrt{\frac{q^2}{16a^2m} + \frac{r}{4a^2}}$

1371. Per applicare la costruzione dell'Ellisse all' Iperbola, non si dee far altro, che portare AG in parte opposta ad AP, come vien indicato dall'equazione $x, + \frac{q}{2m} = \frac{qt}{2mu}$, che ci servì ad eliminare il secondo termine per rapporto ad x, dall' equazione generale. (ved. Fig.ª 102.)

In pratica, tanto se trattisi dell' Ellisse, che dell' Iperbola, rimane solamente da osservare, di dare alle rette AG, EK, AB, BL la situazione opportuna, secondo che verrà indicato dai segni delle lettere a, b, d, m, q &c.

1372. Venendo alla Parabola, dobbiamo costruir le due equazioni $y + \frac{1}{2}d + \frac{bx}{2a} = z$, $\frac{r+qx}{4a^2} = nu$, la prima delle quali ha servito à togliere il secondo termine per rapporto ad x, e la seconda alla riduzione fatta a' (*n.* 1364.). Si costruisca per tanto la prima delle due addotte equazioni come si è praticato di sopra (fig.ª 101) rapporto all' equazione $y + \frac{1}{2}d + \frac{bx}{2a} = z$. Le

$2N$ (fig.ª 103) saranno le y, e $BL2$ sarà la direzione del diametro, su cui debbon computarsi le u. Per determinar l'origine delle u, e per conseguenza il vertice del diametro $BL2$, si faccia uso dell' equazione $\frac{r+qx}{4a^2} = nu$. Da questa si ha $x + \frac{r}{q} = \frac{4a^2nu}{q}$, onde se all' opposto di AP, si prenda la parte AG $\frac{r}{q}$, si avrà $GP = \frac{4a^2nu}{q}$.

Per il punto G si conduca GCD parallela alle PM e il punto C nel quale incontrerá la $2LB$ sarà l' origine delle u, perchè l'equazione $GP = \frac{4a^2nu}{q}$ dimostra, che quando GP è=o, u dev' esser tale parimente. D' altronde le u dovendo esser computate sulla linea da cui partono le z, debbono computarsi sulla $B2$.

1373. Non si tratta ora più, che di trovare il valore del parametro n. A quest' oggetto risalgo all' equazione trovata di sopra $GP = \frac{4a^2nu}{q}$, ed osservo, che le parallele CD, $2I$ danno $BC : BD$, ò $AG :: C2 : DI$ ò GP, vale a dire $BC : \frac{r}{q} :: u : \frac{4a^2nu}{q}$; dunque $BC = \frac{r}{4a^2n}$, ed $n = \frac{r}{4BC.a^2}$ dove a, ed r sono quantità date, e BC è nota per la costruzione.

Sapendosi così il parametro, e l' angolo delle co-

coordinate in virtù della costruzione, si è in istato di descrivere la Parabola, secondo ciò che diremo qui appresso.

1374. Resta da costruirsi l' Iperbola riferita agli asintoti. Per questo si costruiscano le due equazioni ausiliari $y-\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}=z$, $x+\frac{\beta\gamma}{\alpha}=t$ che si sono adoperate (*n.* 1362.) per ridurre l'equazione $\alpha^{x}y+\beta\gamma y-\delta\varepsilon x-\lambda\mu\nu=0$ alla forma $tz=K^{2}$. Dalla prima si raccoglie, che bisogna diminuir ciascuna y della quantità $\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}$ onde ottenere i valori delle z. A quest'effetto si conduca per il punto A, origine delle y, e delle x una retta AB parallela alle ordinate PM, ò y, eguale à $\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}$ (Fig^{a} 104.) Quindi per il punto B si faccia passare la retta CBQ parallela ad AP, e le QM saranno i valori delle x, perchè si ha $QM=PM-PQ=PM-AB=y-\frac{\delta\varepsilon}{\alpha}=z$;

1375. Per determinare le t, si vede dall'equazione $x+\frac{\beta\gamma}{\alpha}=t$, che fa d'uopo accrescere le x, cioè le rette AP della quantità $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$. All'opposto di AP si prenda la parte $AG=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, e condotta GS parallela alle PM, e che incontri la BQ nel punto C, si avrà $CQ=t$; C sarà il centro dell'

pun-

Iperbola, e $C\mathcal{Q}$, CS ne saranno gli asintoti. Così non si tratterà più che di descriver l'Iperbola mediante l'equazione $tz=K^2$ fra gli asintoti dati, come s'insegnerà (*n.* 1380).

Applichiamo finalmente la Teoria alla pratica, e sia . . .

1376. *Probl.* Dato che una retta OL (Fig. 105. si muova equabilmente, radendo i lati dell'angolo KCL, si dimanda qual debba esser la curva descritta da un suo punto qualunque M.

Soluzione. Sia MP parallela a CL, ed MS perpendicolare a CK, e si ponga $CP=y$, $PM=x$. L'angolo OCL essendo dato, si conosce l'angolo OPM e perciò il supplemento MPS. Sia *sen.* $MPS=p$, e *cos.* $PMS=q$, il raggio essendo r. Finalmente si ponga $MO=m$, $ML=n$. Si avrà dal triangolo rettangolo PSM, $r:p::x:MS$, ed $r:q::x:PS$; quindi si deriva $MS=\frac{px}{r}$, $PS=\frac{qx}{r}$. Ora, in virtù delle parallele CL, PM, si ha $ML:CP::MO:PO$, vale a dire $n:y::m:PO=\frac{my}{n}$; dunque $SO=PS+PO=\frac{qx}{r}+\frac{my}{n}$. Ma il triangolo rettangolo MSO da l'equazione $MS^2+SO^2=MO^2$, cioè $\frac{p^2x^2}{r^2}+\frac{q^2x^2}{r^2}+\frac{2qmxy}{nr}+\frac{m^2y^2}{n^2}=m^2$; dunque, a motivo che $p^2+q^2=r^2$, si avrà $x^2+\frac{2qmxy}{nr}+\frac{m^2y^2}{n^2}=m^2$, la qua-

quale è un' equazione all' Ellise.

Eccoci à descriverè i Luoghi geometrici costruiti di sopra.

1377. *Probl.* Dati due diametri conjugati dell' Ellisse, insieme coll'angolo che formano fra di loro, descriver l' Ellisse.

Soluzione. Dal vertice M del diametro $2M$ (Fig.^{a} 106.) si abbassi sull' altro diametro conjugato EF la perpendicolare MD, e si ponga $CL=y$, e $CO=x$; si avrà (*n.* 810,811) $MD.CE=xy$, e $CM^2+CE^2=x^2+y^2$. Dalla 1.^{a} $2CE.DM=2xy$, dunque $CM^2+CE^2=(x+y)^2-2CE.DM$, e trasponendo $\sqrt{(CM^2+CE^2+2CE.DM)}=x+y$. Con questo si ha la somma dei semiassi, ed in oltre la somma dei loro quadrati x^2, y^2, e perciò si può determinare x, e y. Suppongasi noto pertanto l'asse maggiore, e conoscendo in questa guisa il centro C, e con un raggio CP, CN (Fig.^{a} 107.) uguale al semiasse maggiore, si descriva un' arco indefinito, che tagli la tangente condotta al vertice di uno de diametri conjugati in due punti N, P; dal contatto M si conducano due rette respettivamente parallele alle CP, CN, e dai punti P, N due perpendicolari. I punti F, f nei quali queste s' incontreranno, saranno i fuochi dell' Ellisse. Per vederne una dimostrazione, supponghiamo che i punti F, f sieno realmente i fuochi, e si prolunghino FM, fm finchè incontrino in R, Q le perpendicolari Pf, NF parimente prolungate. A motivo che l' angolo fMP è uguale all' angolo FMN, i triangoli fMQ, FMR sono isosceli, e perciò FQ, fR sono eguali ambedue all'asse maggiore; $FN=NR$, $fP=PQ$ ed, $FC=fC$; quindi i triangoli FNC, FRf sono simili, come i triangoli fCP, fFQ, e si

e si ha $NC = \frac{1}{2} Rf$; e $CP = \frac{1}{2} F\mathfrak{Q}$ come si era supposto nella costruzione; dunque i punti F, f sono realmente i fuochi, e niente manca perchè si possa descrivere l'Ellisse.

1378. *Probl.* Dato un'diametro della Parabola, ed il suo parametro, farne la descrizione.

Soluzione. Prolungando il diametro al di sopra del suo vertice, di una quantità eguale alla quarta parte del parametro si ha la Direttrice (*n.* 738.). Trovata questa, al vertice del diametro si conduca una tangente, e si faccia un'angolo al punto del contatto dalla parte interna della Parabola, eguale all'angolo fatto dalla tangente colla perpendicolare alla Direttrice. La linea, che forma quest'angolo passerà (*n.* 743.) per il fuoco della Parabola. Avendo il fuoco, e la Direttrice si può descriver la Parabola per ciò che si disse (*n.* 739.)

1379. *Probl.* Dati gli asintoti di un'Iperbola, e l'equazione per rapporto ad essi, descriver l'Iperbola.

Soluzione. Si dia un valore qualunque ad x, onde dedurne y, o sia un punto dell'Iperbola. Avuto questo, basta condurre per questo punto tante rette, quante si vogliono, che vadano a terminare da ambe le parti agli asintoti; prendasi su queste rette dalla parte opposta del punto trovato una distanza dall'altro Asintoto eguale à quela del punto suddetto dal primo asintoto, si avranno altrettanti punti dell'Iperbola.

Se in vece dell'equazione dell'Iperbola, fosse dato il fuoco, si congiungerebbe il centro col fuoco, e si avrebbe la direzione dell'asse trasverso; quindi fatto centro nell'intersezione degli asintoti,

con

con un intervallo eguale alla distanza dal fuoco si descriverebbe un' arco il quale segasse l' asintoto in un punto ; da quel punto si abbasserebbe sull' asse trovato una perpendicolare , ed essa determinerebbe il vertice (*n.* 836 , 862) dopo di che non rimane difficoltà .

SEZIONE III.

De' Problemi Geometrici Indeterminati degli Ordini superiori .

1380. Fin quì de' Luoghi geometrici lineari . Sia adesso l'equazione indeterminata di second'ordine $ax+by+cz+d=0$. Essendo espressi (Fig.ª 108) per AN , $\mathcal{A}N$ &c. i valori d' x , e manifesto che à ciascuno di tali valori debbono corrispondere infiniti valori dell' altre due incognite , Si prendano pertanto sull'indefinita NX , le parti NM , NM , le quali rappresentino i valori d' y , corrispondenti ai respettivi valori d' x . E poiche a ciascun valor d' y deve corrispondere un valor determinato di z , s' innalzino ai punti M le rette MO , MO &c. fra di loro parallele , e che abbiano relativamente alle AN un obliquità determinata dalla natura del problema . La superficie alla quale appartengono gl' infiiti punti O , O &c. sarà il Luogo geometrico dell' equazione proposta : Vediamo un' un'esempio ,

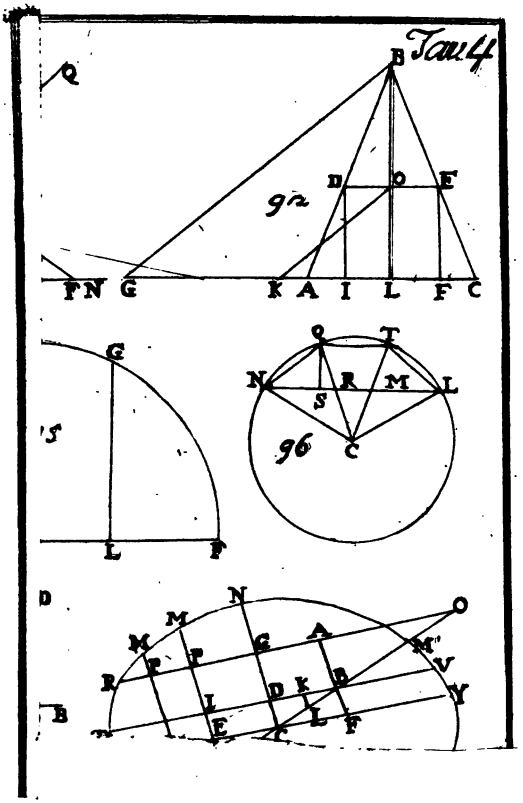
Probl. Data una retta AB di posizione , e di grandezza (Fig.ª 109.) si cerca un punto O situato in un piano inclinato sul piano verticale , da cui conducendo due rette all' estremità A , B , ne risulti un angolo retto .

So-

Soluzione. Si conduca ON perpendicolare ad AB, ed al punto N la perpendicolare NT. Dal punto O si abbassi su di questa la perpendicolare OM, e si congiungano i punti A, O; B, O. Si faccia $MN=y$, $MO=z$, $AN=x$, ed $AB=a$. Si avrà $ON^2=y^2+z^2$; ma $ON^2=ANB=ax-x^2$; dunque $ax-x^2=y^2+z^2$ equazione che rappresenta la superficie sferica; ond' essa è il Luogo geometrico del problema proposto.

1381. Abbiasi finalmente un' equazione indeterminata di terz' ordine $ax+by+cz+du+e=0$. Le parti AN, AN &c. rappresentino (Fig.ª 110) i valori di x, e le porzioni, NM, NM, rappresentino gl'infiniti valori di y corrispondenti a quelli di x. A ciascun punto M si alzino delle indefinite MZ, in guisa che tutte sieno parallele fra loro, e che formino colla NX l'angolo richiesto dal problema. Sopra delle MZ si prendano le parti MO, MO &c. che rappresentino gl'infiniti valori delle rette corrispondenti a quelli delle y e poichè a ciascun valore di z corrisponde un determinato valor di u, si conducano per i punti O le parallele OR, ciascuna delle quali equivalga al respettivo valore di u, e che formi l'angolo richiesto colla MO. Il solido, nel quale vengono comprese le infinite RO, è il Luogo geometrico dell' equazione data.

I L F I N E.


Tav. 4
Q
B
D
O
E
92
F N G K A I L F C
G
L F
Q T
N R M L
S
96 C
D
N
M
O
M
G A
M'
R P P
V
D K B
Y
B
I
E C L F